1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

20 febbraio 2014

Cognome	**Nome**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO/31

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1 RIVEDI. (**2.5 punti**) Un'azienda vende arance in sacchetti e succo di arancia. Le arance si distinguono in base ad un punteggio che varia nell'intervallo da 1 (scadente) a 10 (eccellente). Al momento l'azienda dispone di 100mila kg di arance con punteggio 9 e 120mila kg di arance con punteggio 6. La qualitá media delle arance utilizzate per la vendita in sacchetti deve essere almeno 7 e la qualitá media delle arance utilizzate per produrre succo di arancia deve essere almeno 8. Ogni kg di arancia utilizzato per il succo produce un guadagno di 1,5 euro e richiede un costo di 1,05 euro. Ogni kg di arancia venduto in sacchetti produce un guadagno di 1,5 euro e richiede un costo di 0,70 euro. Definire un modello di PL che consente di definire come utilizzare le arance per i due prodotti in modo da massimizzare il profitto.

Esercizio 2 TERMINA. (**8 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\min_{\mathbb{R}^2} \quad (x_1 + x_2 - 4)^2$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$-x_1 + 2x_2 \geq -1$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_2 \geq 0$$

(i) (**2 punti**) Dire se il problema è (strettamente) convesso/concavo.

(ii) (**1,5 punti**) Determinare se esistono i punti di minimo NON vincolato e dire se possono essere punti di minimo anche del problema vincolato.

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (1,\ 0)^T$.

(iv) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT, calcolare i moltiplicatori e dire se nel punto $\hat{x} = (1,\ 0)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & 10x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & 5x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Dato il punto $\hat{x} = (\frac{2}{5},\ 0, 1)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$.

(ii) (**3 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**2 punti**) Scrivere le SBA del poliedro in forma standard corrispondenti ai vertici individuati al punto (iii). Scegliere una delle SBA ed indicare le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & 10x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & 5x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(iv) (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da -1 a $-1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Sia dato il seguente problema di knapsack binario

$$
\begin{array}{ll}
\max & 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 30x_4 + 35x_5 + 40x_6 \\
 & 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 20x_4 + 25x_5 + 30x_6 \leq 67 \\
 & x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, 6
\end{array}
$$

(i) (**1 punti**) Determinare la soluzione ottima del problema rilassato.

(ii) (**1 punti**) Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;

(iii) (**2 punti**) Determinare la soluzione ottima utilizzando il metodo del Branch and Bound.