

1^a PROVA scritta di
RICERCA OPERATIVA (BATR 9 cfu)
20 febbraio 2014

Cognome

Nome

VOTO/31

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stata sostenuta.

Esercizio 1. (4,5 punti)

$$\min_{\mathbb{R}^2} \min_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}(2x_1 + x_2 - 4)^2$$

- (i) **(1, punto)** Dire se la funzione è/non è convessa (strettamente o non) giustificando la risposta.
- (ii) **(1,5 punti)** Determinare, se esistono, punti stazionari e studiarne la natura.
- (iii) **(0,5 punto)** Scrivere l'approssimazione lineare della funzione nell'intorno del punto $(1, 1)^T$.

Esercizio 2. (6 punti)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{aligned} \min_{\mathbb{R}^2} \quad & \frac{1}{2}(2x_1 + x_2 - 4)^2 \\ & x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq 1 \\ & -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 3 \\ & \frac{1}{9}x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) **(0.5 punti)** Dire se un punto determinato al punto (ii) dell'Esercizio 1 può/non può essere un punto di minimo.
- (ii) **(1 punti)** Dire se le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti di minimo globale.
- (iii) **(2,5 punti)** Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (1, 0)^T$.
- (iv) **(2 punti)** Scrivere le Condizioni di KKT, calcolare i moltiplicatori e dire se nel punto $\hat{x} = (1, 0)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (7 punti)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & 10x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & 5x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) **(1,5 punto)** Dato il punto $\hat{x} = (\frac{2}{5}, 0, 1)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da \hat{x} attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in \hat{x} . Individuare il valore dello spostamento massimo t^{\max} .
- (ii) **(3 punti)** Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (iii) **(0,5 punto)** Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del semplice ($Ax = b$, $x \geq 0$ con $b \geq 0$).
- (iv) **(2 punti)** Scrivere le SBA del poliedro in forma standard corrispondenti ai vertici individuati al punto (iii). Scegliere una delle SBA ed indicare le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (8,5 punti)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & 10x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & 5x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) **(1,5 punto)** Scrivere il problema duale.
- (ii) **(2 punti)** Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.
- (iii) **(3 punti)** Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.
- (iv) **(2 punti)** Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da -1 a $-1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Sia dato il seguente problema di knapsack binario

$$\begin{aligned} \max \quad & 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 30x_4 + 35x_5 + 40x_6 \\ & 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 20x_4 + 25x_5 + 30x_6 \leq 67 \\ & x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

- (i) (1 punti) Determinare la soluzione ottima del problema rilassato.
- (ii) (1 punti) Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;
- (iii) (2 punti) Determinare la soluzione ottima utilizzando il metodo del Branch and Bound.