1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (BLTR/MMER 9/6 cfu)

20 aprile 2012 (straordinario)

Cognome	Nome

VOTO

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo** [1]

Esercizio 1. (**4.5 punti**) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min_{I\!R^3} (x_1 - 2x_2x_3)^2$$

(i) (**2 punti**) verificare se esistono punti che soddisfano le condizioni necessarie del primo ordine. Sceglire un punto e dire, se possibile, di che punti si tratta (minimi/massimi/sella).

(ii) (**1 punto**) Scrivere l'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto $(0,\ 1,\ 1)^T$.

(iii) (**1.5 punto**) Dire se l'approsimazione quadratica calcolata al punto (ii) risulta convessa giustificando la risposta.

Esercizio 2. (**7,5 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\min \ \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 8 \\ -2 & 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

(i) (**0,5 punti**) Dire se si tratta di un problema convesso o concavo giustificando la risposta;

(ii) (0,5 punti) Dire se il punto $(2,\ 0,\ 0)^T$ può/non può essere soluzione giustificando la risposta.

(iii) (**1,5 punto**) Dato il punto $\hat{x} = (0,\ -1,\ 1)^T$, determinare, se esiste, una direzione **ammissibile** lungo cui é possibile spostarsi attivando un vincolo in piu' rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$.

[1] In tal caso, NON sarà possibile ricevere informazioni via e-mail, telefono o comunque senza la possibilità di verificare l'identitá

(iv) (**2,5 punti**) Verificare se esiste, una direzione **ammissibile e di discesa** nel punto $\hat{x} = (0, \ -1, \ 1)^T$, determinandone eventualmente una. Se tale direzione esiste, Indicare il procedimento per il calcolo del passo $t_{\max}$ per cui si rimane ammissibili muovendosi lungo di essa.

(v) (**2,5 punti**) Scrivere le condizioni di KKT. Determinare i moltiplicatori nel punto $(0, \ -1, \ 1)^T$ e dire se le condizioni di KKT sono o non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (**5,5 punti**)

Sia dato il poliedro

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\
&x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\
&x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

(i) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b, \ x \geq 0$).

(ii) (**3 punti**) Elencare i vertici del poliedro originale in $I\!R^3$ e le corrispondenti Soluzioni di Base Ammissibile del poliedro in forma standard.

(iii) (**2 punti**) Scegliere una delle SBA ottenute al punto (iii) ed indicare le variabili di base e fuori base, il loro valore e le matrici di base e fuori base corrispondenti. Supponendo che l'obiettivo sia

$$\min \ 5x_1 + \frac{3}{2}x_3$$

scrivere i coefficienti di costo ridotto nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (N.B. si tratta di problema dell'esercizio 3)

$$\begin{aligned}
\min \quad & 5x_1 + \tfrac{3}{2}x_3 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\
& x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\
& x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale (disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore).

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale dato.

(iv) (**2 punti**) Dire se e come cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da 1 a $1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "piccolo".

Esercizio 5 (5,5 punti)

Risolvere il seguente problema di Knapsack binario:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 \leq 5 \\
 & x_i \in \{0,1\},\ i = 1, \ldots, 5
\end{array}
$$