$1^a$ PROVA scritta di

# RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

20 luglio 2015

| **Cognome** | **Nome** |
|---|---|

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

**VOTO**

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un **massimo di tre mesi** dalla data in cui è stato sostenuta.

**Esercizio 1**. (**7 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1 + 2x_2 \\ & -x_1 + 3x_2 - 7x_3 \leq -1 \\ & -2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

**(i)** (**1 punti**) Dire se il problema è (strettamente) convesso/concavo.

**(ii)** (**1 punti**) Determinare, se esiste, un punto stazionario NON VINCOLATO e discuterne la natura.

**(iii)** (**0,5 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT dire se il punto definito in (ii) puó sddisfarle.

**(iv)** (**2,5 punti**) Determinare, se esiste un punto che soddisfa le condizioni di KKT con $x_2 = 0$ e il $1^o$ e $2^o$ vincoli ATTIVI, calcolando i moltiplicatori.

**(v)** (**2 punti**)

Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (\frac{1}{8},\ 0,\ \frac{1}{8})^T$.

**Esercizio 2**. (**6 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & -2x_1 + 28x_3 \\ & -x_1 + 3x_2 - 7x_3 \leq -1 \\ & -2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

**(i)** (**2 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**(ii)** (**2,5 punto**) Individuato al punto (i) un vettore $\hat{x}$ ammissibile ma NON vertice, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$.

Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$ e il corrispondente punto.

Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa o di salita per la funzione obiettivo.

**(iii)** (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

**(iv)** (**1 punto**) Per i vertici individuati al punto (i), scrivere il corrispondente vertice (SBA) del poliedro in forma standard definito al punto (iii). Indicare le variabili di base e fuori base e il loro valore e le rispettive matrici di base e fuori base.

**Esercizio 3**. (**12 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ & 7x_1 + 10x_2 \leq 28 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

**(i)** (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

**(ii)** (**1 punti**) Dire se la soluzione ottima individuata al punto (i) è ancora ottima se al problema viene aggiunto il vincolo di interezza sulla variabile $x_2 \in Z$.

**(iii)** (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

**(iv)** (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema duale.

**(v)** (**1,5 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da $-2$ a $-2+\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ "sufficientemente piccolo".

**(vi)** (**1,5 punti**) Dire se e come è possibile individuare l'intervallo di valori di $\varepsilon > 0$ per cui l'analisi effettuata al punto (v) risulta valida.

**(vii)** (**1,5 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il coefficiente della variabile $x_1$ nella funzione obiettivo cambia da 1 a $1+\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ "sufficientemente piccolo".

**Esercizio 4**. (**6 punti**) Un'azienda di pneumatici deve pianificare la produzione di $N = 4$ tipologie di prodotti (economici, cinturati, da neve e radiali) su due turni di produzione e per i prossimi $T = 3$ mesi. Il processo di produzione richiede l'utilizzo di macchinari per la vulcanizzazione, la fabbricazione, la plastometria, ma l'unica risorsa effettivamente limitata è la macchina per la vulcanizzazione.

Per ogni mese $j$ e per ogni turno produttivo $i$ sono note le ore (in migliaia) di macchinario per la vulcanizzazione disponibili $O_{ij}$. nei due turni di produzione $i = 1, 2$ e nei tre mesi $j = 1, 2, 3$ indicate con $d_{ij}$ sono riportate in tabella

| | ottobre | novembre | dicembre |
|---|---|---|---|
| turno 1 | 110 | 130 | 120 |
| turno 2 | 100 | 120 | 115 |

I diversi tipi di pneumatici richiedono tempi diversi di vulcanizzazione $t_i$ per $i = 1, \ldots, N$. È nota anche una previsione di domanda (in migliaia) per ogni tipo di pneumatico nei tre mesi: sia $r_{hj}$ la previsione di vendita dei pneumatici di tipo $h = 1, \ldots, 4$ nel mese $j = 1, \ldots, 3$. Questi dati sono riportati nella seguente in tabella

| | tempo ore/unità | previsione di vendita ottobre | novembre migliaia | dicembre |
|---|---|---|---|---|
| pneumatico 1 | 4,5 | 8 | 7 | 6 |
| pneumatico 2 | 5 | 18 | 16 | 18 |
| pneumatico 3 | 5,5 | 4 | 15 | 15 |
| pneumatico 4 | 6 | 6 | 5 | 8 |

Ogni ora di vulcanizzaione ha un costo $c_1 = 10$ nel primo turno e $c_2 = 12$ nel secondo turno produttivo. Inoltre è possibile immagazzinare gli pneumatici ad un costo mensile per unità indipendentemente dal tipo di $c_m = 4$.

Formulare un modello di PL per determinare la strategia di produzione per i due turni nei prossimi $T$ mesi.