SIMULAZIONE 1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (BLTR/MMER 9/6 cfu)

21 dicembre 2011

Cognome	Nome

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

Esercizio 1. (**4.5 punti**) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min_{I\!R^3} \frac{1}{4}y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2 + y_1y_2 + 2y_2y_3 + y_1 - 3y_2 + y_3$$

(i) (**2 punto**) Dire se la funzione è\non è convessa\strettamente convessa giustificando la risposta.

(ii) (**1,5 punti**) Determinare i punti che soddisfano le condizioni necessarie del primo ordine e dire, se possibile, di che punti si tratta (minimi/massimi/sella).

(iii) (**1 punto**) Scrivere l'approssimazione lineare della funzione nell'intorno del punto $(1,\ 0,\ 1)^T$.

Esercizio 2. (**6 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare (n.b. la funzione obiettivo è la stessa dell'Esercizio 1)

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{4}y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2 + y_1y_2 + 2y_2y_3 + y_1 - 3y_2 + y_3 \\ & -2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ & 5y_1 - 5y_2 + y_3 = 1 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**0,5 punti**) Dire se uno dei punti determinato all'Esercizio 1(ii) può\non può essere minimo giustificando la risposta.

(ii) (**0.5 punti**) Dire se il problema è\non è convesso.

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (0,\ \frac{1}{5}, 2)^T$. Indicare il valore del passo $t_{\max}$ per cui si rimane ammissibili.

(iv) (**2,5 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT e dire se nel punto $(0,\ 0,\ 1)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il poliedro (n.b. l è la stesso dell'Esercizio 2)

$$\begin{array}{l} -2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ 5y_1 - 5y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Dato il punto $\hat{y} = (0,\ \frac{1}{5}, 2)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{y}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{y}$.

(ii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso $(Ay = b,\ y \geq 0)$.

(iii) (**3 punti**) Scrivere i vertici del poliedro originale e le corrispondenti Soluzioni di Base Ammissibile del poliedro in forma standard.

(iv) (**2 punti**) Scegliere una delle SBA ottenute ed indicare nel poliedro in forma standard le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Considerato poi l'obiettivo min $20y_1 - 10y_2 + 21y_3$, scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ & -2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ & 3x_1 + x_2 \leq \frac{21}{2} \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(ii) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema duale.

(iv) (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da 10 a $10 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5,5 punti)

Si consideri il problema di PL dell'Esercizio 4 con l'aggiunta del vincolo di interezza sulle variabili:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & -2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ & 3x_1 + x_2 \leq \tfrac{21}{2} \\ & x_1 \geq 0 \\ & x \text{ intero} \end{aligned}$$

Sia $\hat{x} = (0,\ 1)^T$ una soluzione ammissibile intera.

(i) (**0,5 punti**) Dire qual è il valore dell'ottimo corrente e dell'upper bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;

(ii) (**1,5 punti**) dire se si può concludere che è stata già determinata la soluzione ottima, o scrivere i due problemi generati dal metodo;

(iii) (**2,5 punti**) indicare geometricamente (anche sulla stessa figura) le regioni ammissibili e le soluzioni ottime dei due problemi;

(iv) (**1 punti**) scegliere uno dei due problemi e analizzarlo (dire se è possibile chiudere il problema, o aggiornare l'ottimo corrente o altro).