1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

22 aprile 2013

Cognome	**Nome**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**4.5 punti**) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min_{\mathbb{R}^2} \; 2(x_1 - x_2)^4 + x_1 - x_2^2$$

(i) (**1,5 punti**) Dire se il punto $(0,\ \frac{1}{2})$ soddisfa le condizioni necessarie di minimo del primo ordine e in caso affermativo studiare la natura (minimo, massimo, sella) giustificando la risposta.

(ii) (**1,5 punto**) Scrivere l'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto $(1,\ 0)^T$

(iii) (**1,5 punto**) Dire se l'approssimazione quadratica determinata al punto (ii) ammette minimo globale.

Esercizio 2. (**6 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare (n.b. la funzione obiettivo è la stessa dell'Esercizio 1)

$$\begin{array}{ll} \min & 2(x_1 - x_2)^4 + x_1 - x_2^2 \\ & \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**0.5 punti**) Dire se $(0,\ \frac{1}{2})$ può/non può essere un punto di KKT.

(ii) (**1 punti**) Dire se le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti di minimo globale.

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (0,\ 0)^T$.

(iv) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT, calcolare i moltiplicatori e dire se nel punto $\hat{x} = (0,\ 0)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il poliedro

$$\begin{aligned} &y_1 + y_2 - 2y_3 \geq 1 \\ &y_1 - 2y_2 - y_3 = -1 \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (**1,5 punto**) Dato il punto $\hat{x} = (1,\ 1, 0)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$.

(ii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iii) (**3 punti**) Scrivere i vertici del poliedro originale e le corrispondenti Soluzioni di Base Ammissibile del poliedro in forma standard.

(iv) (**2 punti**) Scegliere una delle SBA ottenute ed indicare nel poliedro in forma standard le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Considerato poi l'obiettivo min $5y_1 + 3y_2 - 3y_3$, scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(ii) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(iv) (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da 3 a $3 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Si consideri il problema di programmazione lineare intera

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1 - x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 3 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 3 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x \text{ intero}
\end{array}
$$

Sia $\hat{x} = (0,\ 3)^T$ una soluzione ammissibile intera. Utilizzando la soluzione grafica, se necessario, rispondere ai seguenti quesiti.

(i) (**0,5 punti**) Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;

(ii) (**0,5 punti**) dire se si può concludere che è stata già determinata la soluzione ottima, o scegliere una variabile di branching e scrivere i primi due problemi generati per separazione rispetto a tale variabile;

(iii) (**2 punti**) indicare geometricamente (anche sulla stessa figura) le regioni ammissibili e le eventuali soluzioni ottime dei due sottoproblemi;

(iv) (**2 punti**) scegliere uno dei due problemi e analizzarlo (dire se è possibile chiudere il problema, o aggiornare l'ottimo corrente o altro).