

1^a PROVA scritta di
RICERCA OPERATIVA (9 cfu)
22 dicembre 2014

Cognome

Nome

VOTO

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (11 punti)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\min (x_1 - 2)^2 + x_2 + (x_3 - 1)^2$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- (i) **(1,5 punti)** Dire se il problema è (strettamente) convesso/concavo.
- (ii) **(1 punto)** Determinare se esistono i punti di minimo NON vincolato.
- (iii) **(1 punto)** Determinare, se esiste, una direzione di discesa nel punto $\hat{x} = (0, 1, 0)^T$.
- (iv) **(2 punti)** Determinare, se esiste, una direzione ammissibile nel punto $\hat{x} = (0, 1, 0)^T$.
- (v) **(0,5 punti)** Determinare una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (0, 1, 0)^T$.
- (vi) **(3 punti)** Scrivere le Condizioni di KKT, e determinare, se esiste, un punto che soddisfa le condizioni con $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$, calcolando i moltiplicatori. Stabilire la natura del punto individuato.
- (v) **(2 punti)** Dire se le condizioni di KKT possono essere soddisfatte nel punto $\hat{x} = (0, 1, 0)^T$, individuando il valore dei moltiplicatori.

Esercizio 2. (9 punti)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\max x_2 - 6x_3$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(i) (3 punti) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (ii) (3 punto) Individuato al punto (i) un vettore \hat{x} NON vertice, determinare una direzione di discesa e ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da \hat{x} attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in \hat{x} . Individuare il valore dello spostamento massimo t^{\max} che consente di mantenere l'ammissibilità.
- (iii) (0,5 punto) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simpleso ($Ax = b$, $x \geq 0$ con $b \geq 0$).
- (iv) (2,5 punti) Scegliere i vertici individuati al punto (i) e scrivere i corrispondenti vertici (SBA) del poliedro in forma standard definito al punto (iii) e per ciascuno di essi indicare le variabili di base e fuori base e il loro valore.

Esercizio 3. (11 punti)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 - 6x_3 \\ & x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) (1,5 punto) Scrivere il problema duale.
- (ii) (2 punti) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.
- (iii) (3 punti) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.
- (iv) (1,5 punti) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da 1 a $1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".
- (v) (2 punti) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il coefficiente della variabile x_2 nella funzione obiettivo cambia da 1 a $1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".
- (vi) (1 punti) Dire se la soluzione ottima individuata al punto (iii) è ancora ottima se al problema primale viene aggiunto il vincolo di interezza sulle variabili.