1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

22 dicembre 2014

Cognome	Nome

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**9 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1-2)^2 + x_2 + (x_3-1)^2 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 \le 2 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

(i) (**1,5 punti**) Dire se il problema è (strettamente) convesso/concavo.

(ii) (**1 punti**) Determinare se esistono i punti di minimo NON vincolato.

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (0,\ 1,\ 0)^T$.

(iv) (**3 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT, e determinare, se esiste un punto che soddisfa le condizioni con $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$, calcolando i moltiplicatori. Stabilire la natura del punto individuato.

(v) (**1 punti**) Dire se le condizioni di KKT possono essere soddisfatte nel punto $\hat{x} = (0,\ 1,\ 0)^T$.

Esercizio 2. (**7 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 - 6x_3 \\ & x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**3 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(ii) (**2 punto**) Individuato al punto (i) un vettore $\hat{x}$ NON vertice, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$. Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa.

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**1,5 punti**) Scegliere i vertici individuati al punto (i) e scrivere i corrispondenti vertici (SBA) del poliedro in forma standard definito al punto (iii). Scegliere uno dei vertici (SBA) ed indicare le variabili di base e fuori base e il loro valore.

Esercizio 3. (**11 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 - 6x_3 \\ & x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(iv) (**1,5 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da 1 a $1+\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

(v) (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il coefficiente della variabile x_2 nella funzione obiettivo cambia da 1 a $1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

(vi) (**1 punti**) Dire se la soluzione ottima individuata al punto (iii) è ancora ottima se al problema primale viene aggiunto il vincolo di interezza sulle variabili.

Esercizio 4. (**4 punti**) Tre fonderie (A, B, C) producono tondini di ferro per complessive 12, 7 e 15 migliaia di tonnellate (Kton) a settimana. Il ferro è inviato in 4 magazzini intermedi (M1, M2, M3 e M4) per controlli di qualità e da qui a un porto per l'imbarco e la spedizione all'estero. I magazzini intermedi possono visionare rispettivamente fino ad un massimo di 4, 5, 12 e 7 Kton di ferro per settimana. Il costo settimanale di magazzino è pari a 32, 30, 21 e 26 Keuro per ogni Kton. Inoltre è noto il costo c_{ij} (in KEURO) associato al trasporto di un Kton di ferro dalle fonderie ai magazzini per i = A, B, C; $j = 1, 2, 3, 4$ e il costo d_j (in KEURO) associato al trasporto di un Kton di ferro dai magazzini al porto ($j = 1, 2, 3, 4$), riportato nella seguente tabella.

	M1	M2	M3	M4
A	0.1	0.2	0.3	0.25
B	0.15	0.15	0.2	0.3
C	0.4	0.1	0.1	0.35
PORTO	1	1.2	0.8	1.3

Determinare il piano di trasporto a costo complessivo minimo, sapendo che tutto il ferro prodotto deve essere inviato, e che non è possibile inviare da un singolo magazzino al porto più del 40% del ferro complessivamente inviato.