1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

22 giugno 2015

Cognome	**Nome**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un **massimo di tre mesi** dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**8 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1^3 - x_1x_2^2 + 2x_1^2x_2 + x_1x_2 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & -6x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & -18x_1 + 10x_2 \leq 45 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punti**) Dire se il problema è (strettamente) convesso/concavo.

(ii) (**1 punti**) Trascurando i vincoli, dire se i punti $(0,\ 0)^T$ e $(0,\ 1)^T$ sono punti stazionari NON VINCOLATI e discuterne la natura.

(iii) (**0,5 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT dire se i due punti definiti in (ii) possono sddisfarle.

(iv) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste un punto che soddisfa le condizioni di KKT con $x_2 > 0$ e i $2^o, 3^o$ vincoli ATTIVI, calcolando i moltiplicatori.

(v) (**2 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (\frac{1}{2},\ 3)^T$.

(vi) (**0,5 punti**) Dire se le condizioni di KKT possono essere soddisfatte nel punto $\hat{x} = (\frac{1}{2},\ 3)^T$.

Esercizio 2. (**6 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & -3x_1 + 3x_2 + 45x_3 \\ & -2x_1 - 6x_2 - 18x_3 = -2 \\ & -2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**2 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{48} \\ \frac{5}{48} \end{pmatrix}$$

(ii) (**2,5 punto**) Individuato al punto (i) un vettore $\hat{x}$ ammissibile ma NON vertice, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$.

Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$ e il corrispondente punto.

Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa o di salita per la funzione obiettivo.

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**1 punto**) Scegliere un vertice individuato al punto (i) e scrivere il corrispondente vertice (SBA) del poliedro in forma standard definito al punto (iii). Indicare le variabili di base e fuori base e il loro valore e le rispettive matrci di base e fuori base.

Esercizio 3. (**12 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & -6x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & -18x_1 + 10x_2 \leq 45 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(ii) (**1 punti**) Dire se la soluzione ottima individuata al punto (i) è ancora ottima se al problema viene aggiunto il vincolo di interezza sulla variabile $x_1 \in Z$.

(iii) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(iv) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema duale.

(v) (**1,5 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da 3 a $3 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ "sufficientemente piccolo".

(vi) (**1,5 punti**) Dire se e come è possibile individuare l'intervallo di valori di $\varepsilon > 0$ per cui l'analisi effettuata al punto (v) risulta valida.

(vii) (**1,5 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il coefficiente della variabile x_1 nella funzione obiettivo cambia da -2 a $-2 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ "sufficientemente piccolo".

Esercizio 4. (**5 punti**) Un'azienda produce carbone in $M = 3$ diverse miniere e deve consegnarlo a $N = 4$ diversi clienti. Le miniere hanno una capacità produttiva Q_i $i = 1, \ldots, M$ e il carbone è caratterizzato dal contenuto di cenere e di zolfo (per ton) e da un costo di estrazione (euro/ton) che dipendono dalla miniera. Contenuto in cenere e zolfo, costo di estrazione e capacità produttiva di ogni miniera sono riportate in tabella

	cenere ton	zolfo ton	costo euro/ton	capacità ton
miniera 1	0,08	0,05	50	120
miniera 2	0,06	0,04	55	100
miniera 3	0,04	0,03	62	140

I clienti hanno una richiesta di carbone R_j $j = 1, \ldots, N$ riportato in tabella

	cliente 1	cliente 2	cliente 3	cliente 4
domanda	80	70	60	40

Il trasporto da una miniera al cliente ha un costo di trasporto c_{ij} riportato in tabella (euro/ton)

	cliente 1	cliente 2	cliente 3	cliente 4
miniera 1	4	6	8	12
miniera 2	9	6	7	11
miniera 3	8	12	3	5

Inoltre il carbone consegnato ad ogni singolo cliente j (proveniente eventualmente da diverse miniere) deve avere un contenuto medio di cenere e solfo percentuale pari al massimo rispettivamente a $a_j^{max} = 6\%$ e $s_j^{\max} = 3,5\%$.

Formulare il modello di PL per determinare la strategia di trasporto ottima