

1^a PROVA scritta di
RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)
23 gennaio 2014

Cognome

Nome

VOTO/31

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, autorizzo al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma non autorizzo

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stata sostenuta.

Esercizio 1. (2.5 punti) Un'azienda vende arance in sacchetti e succo di arancia. Le arance si distinguono in base ad un punteggio che varia nell'intervallo da 1 (scadente) a 10 (eccellente). Al momento l'azienda dispone di 100mila kg di arance con punteggio 9 e 120mila kg di arance con punteggio 6. La qualità media delle arance utilizzate per la vendita in sacchetti deve essere almeno 7 e la qualità media delle arance utilizzate per produrre succo di arancia deve essere almeno 8. Ogni kg di arancia utilizzato per il succo produce un guadagno di 1,5 euro e richiede un costo di 1,05 euro. Ogni kg di arancia venduto in sacchetti produce un guadagno di 1,5 euro e richiede un costo di 0,70 euro. Definire un modello di PL che consente di definire come utilizzare le arance per i due prodotti in modo da massimizzare il profitto.

Esercizio 2. (8 punti)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{aligned} \min_{\mathbb{R}^2} \quad & \frac{1}{6}x_1^4 + \frac{1}{6}x_2^4 + \frac{1}{4}x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq 1 \\ & -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 3 \\ & \frac{1}{9}x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) **(2 punti)** Dire se il problema è (strettamente) convesso/concavo.
- (ii) **(1,5 punti)** Determinare se esistono i punti di minimo NON vincolato e dire se possono essere punti di minimo anche del problema vincolato.
- (iii) **(2,5 punti)** Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (1, 0)^T$.
- (iv) **(2 punti)** Scrivere le Condizioni di KKT, calcolare i moltiplicatori e dire se nel punto $\hat{x} = (1, 0)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (7 punti)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 3x_2 - x_3 \\ & -\frac{1}{2}x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ & -x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{9}x_3 \geq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) **(1,5 punto)** Dato il punto $\hat{x} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4})^T$, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da \hat{x} attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in \hat{x} . Individuare il valore dello spostamento massimo t^{\max} .
- (ii) **(3 punti)** Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (iii) **(0,5 punto)** Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b$, $x \geq 0$ con $b \geq 0$).
- (iv) **(2 punti)** Scrivere le SBA del poliedro in forma standard corrispondenti ai vertici individuati al punto (iii). Scegliere una delle SBA ed indicare le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (8,5 punti)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 3x_2 - x_3 \\ & -\frac{1}{2}x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ & -x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{9}x_3 \geq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) **(1,5 punto)** Scrivere il problema duale.
- (ii) **(2 punti)** Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.
- (iii) **(3 punti)** Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.
- (iv) **(2 punti)** Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da -1 a $-1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Sia dato il seguente problema di PLI

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 3x_2 - x_3 \\ & -\frac{1}{2}x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ & -x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{9}x_3 \geq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & x \text{ intero} \end{aligned}$$

Sia $x^0 = (\frac{20}{19}, 0, \frac{9}{19})^T$ la soluzione ottima del problema rilassato (ovvero ottenuto rimuovendo il vincolo di interezza); sia $x_I = (0, 0, 1)^T$ una soluzione intera.

- (i) **(1 punto)** Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;
- (ii) **(2 punti)** Si scrivano i due sottoproblemi $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2$ generati dal metodo di Branch and Bound separando rispetto alla variabile frazionaria x_1 ;
- (iii) **(2 punti)** Sia $x^1 = (1, 0, \frac{1}{2})^T$ la soluzione ottima del problema \mathcal{P}^1 rilassato. Dire se è possibile chiudere il problema. In caso contrario specificare il criterio per generare i due sottoproblemi.