1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (9 cfu)

26 gennaio 2015

Cognome	**Nome**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**11 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{array}{ll} \min & (x_1^2-2)^2 + x_2^2 + 2x_3^4 - x_3 + 2x_2 + x_1^2 x_2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punti**) Dire se il problema è (strettamente) convesso/concavo.

(ii) (**1 punti**) Determinare se esistono i punti di minimo NON vincolato.

(iii) (**1 punti**) Determinare, se esiste, una direzione di discesa nel punto $\hat{x} = (0,\ 0,\ 1)^T$.

(iv) (**2 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile nel punto $\hat{x} = (0,\ 0,\ 1)^T$.

(v) (**0,5 punti**) Determinare una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (0,\ 0,\ 1)^T$.

(vi) (**3 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT, e determinare, se esiste, un punto che soddisfa le condizioni con $x_1 = 0$ e $x_3 = 0$,, calcolando i moltiplicatori. Stabilire la natura del punto individuato.

(v) (**2 punti**) Dire se le condizioni di KKT possono essere soddisfatte nel punto $\hat{x} = (0,\ 0,\ 1)^T$, individuando il valore dei moltiplicatori.

Esercizio 2. (**9 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 - 6x_3 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**3 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(ii) (**3 punto**) Individuato al punto (i) un vettore $\hat{x}$ NON vertice, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$. Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa.

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**2,5 punti**) Scegliere i vertici individuati al punto (i) e scrivere i corrispondenti vertici (SBA) del poliedro in forma standard definito al punto (iii) e per ciascuno di essi indicare le variabili di base e fuori base e il loro valore.

Esercizio 3. (**11 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 - 6x_3 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(iv) (**1,5 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del pirmo vincolo cambia da 2 a $2 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

(v) (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il coefficiente della variabile x_2 nella funzione obiettivo cambia da 2 a $2 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

(vi) (**1 punti**) Dire se la soluzione ottima individuata al punto (iii) è ancora ottima se al problema primale viene aggiunto il vincolo di interezza sulle variabili.