

1^a PROVA scritta di
RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)
26 gennaio 2015

Cognome

Nome

VOTO

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un **massimo di tre mesi** dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (9 punti)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\min (x_1^2 - 2)^2 + x_2^2 + 2x_3^4 - x_3 + 2x_2 + x_1^2 x_2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- (i) **(1,5 punti)** Dire se il problema è (strettamente) convesso/concavo.
- (ii) **(1 punto)** Determinare se esistono i punti di minimo NON vincolato.
- (iii) **(2,5 punti)** Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (0, 0, 1)^T$.
- (iv) **(3 punti)** Scrivere le Condizioni di KKT, e determinare, se esiste un punto che soddisfa le condizioni con $x_1 = 0$ e $x_3 = 0$, calcolando i moltiplicatori.
- (v) **(1 punto)** Dire se le condizioni di KKT possono essere soddisfatte nel punto $\hat{x} = (0, 0, 1)^T$.

Esercizio 2. (7 punti)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 - 6x_3 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (3 punti) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

- (ii) (2 punto) Individuato al punto (i) un vettore \hat{x} NON vertice, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da \hat{x} attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in \hat{x} . Individuare il valore dello spostamento massimo t^{\max} . Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa.
- (iii) (0,5 punto) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del semplice (Ax = b, x ≥ 0 con b ≥ 0).
- (iv) (1,5 punti) Scegliere i vertici individuati al punto (i) e scrivere i corrispondenti vertici (SBA) del poliedro in forma standard definito al punto (iii). Scegliere uno dei vertici (SBA) ed indicare le variabili di base e fuori base e il loro valore.

Esercizio 3. (11 punti)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 - 6x_3 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) (1,5 punto) Scrivere il problema duale.
- (ii) (2 punti) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.
- (iii) (3 punti) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.
- (iv) (1,5 punti) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da 2 a $2 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".
- (v) (2 punti) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il coefficiente della variabile x_2 nella funzione obiettivo cambia da 2 a $2 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

(vi) (1 punti) Dire se la soluzione ottima individuata al punto (iii) è ancora ottima se al problema primale viene aggiunto il vincolo di interezza sulle variabili.

Esercizio 4. (4 punti) Un'industria produce 3 modelli di lettori cd (l_1, l_2, l_3) utilizzando 4 macchinari diversi (M_1, M_2, M_3, M_4). Ogni lettore cd deve passare su tutte e quattro le macchine M_i e ogni macchina può essere utilizzata al massimo per il numero di ore (*ore_max*) riportato in tabella:

	<i>ore_max</i>
M_1	2400
M_2	2700
M_3	1500
M_4	1700

Per la produzione dei lettori cd sono necessari tempi di lavorazione su ogni macchinario diversi a seconda del modello (t_{ji}):

	M_1	M_2	M_3	M_4
l_1	1	2	1	1
l_2	1	1	2	2
l_3	2	1	3	1

Inoltre si deve produrre (rispetto alla produzione complessiva) al più il 45% di lettori cd l_1 , il 35% di lettori cd l_2 , il 40% di lettori cd l_3 .

Si vuole decidere quanti lettori cd di ogni tipo produrre allo scopo di massimizzare il profitto. I prezzi di vendita dei lettori cd sono riportati in tabella:

	l_1	l_2	l_3
prezzo	150	200	350