1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

30 marzo 2015

Cognome	**Nome**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, $\boxed{\textbf{autorizzo}}$ al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma $\boxed{\textbf{non autorizzo}}$

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un **massimo di tre mesi** dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (8 punti)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$
\begin{array}{ll}
\min & x_1x_2^2 + x_1^2x_2 + x_3^3 + 2x_1 + 3x_2^2x_3 \\
& -8x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq -1 \\
& -10x_1 + 24x_2 + 3x_3 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

(i) (**1,5 punti**) Dire se il problema è (strettamente) convesso/concavo.

(ii) (**1 punti**) Dire se esistono i punti di minimo NON vincolato.

(iii) (**1 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT.

(iv) (**2 punti**) Determinare, se esiste un punto che soddisfa le condizioni di KKT con $x_3 = 0$ e il 1^o vincolo ATTIVO, calcolando i moltiplicatori.

(v) (**2 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (1,\ \frac{1}{12},\ 3)^T$.

(vi) (**0,5 punti**) Dire se le condizioni di KKT possono essere soddisfatte nel punto $\hat{x} = (1,\ \frac{1}{12},\ 3)^T$.

Esercizio 2. (**6 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & 5x_1 + 41x_2 + 2x_3 \\ & -8x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq -1 \\ & -10x_1 + 24x_2 + 3x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**2 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{12} \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{11}{106} \\ \frac{9}{106} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(ii) (**2 punto**) Individuato al punto (i) un vettore $\hat{x}$ ammissibile ma NON vertice, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$.

Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$ e il corrispondente punto.

Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa o di salita per la funzione obiettivo.

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**1,5 punti**) Scegliere un vertice individuato al punto (i) e scrivere il corrispondente vertici (SBA) del poliedro in forma standard definito al punto (iii). Indicare le variabili di base e fuori base e il loro valore.

Esercizio 3. (**12 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & 5x_1 + 41x_2 + 2x_3 \\ & 8x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 1 \\ & -10x_1 + 24x_2 + 3x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (**1 punti**) Dire se la soluzione ottima el problema duale individuata al punto (ii) è ancora ottima se al problema duale viene aggiunto il vincolo di interezza sulle variabili.

(iv) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(v) (**1,5 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da 1 a $1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ "sufficientemente piccolo".

(vi) (**1,5 punti**) Dire se e come è possibile individuare l'intervallo di valori di $\varepsilon > 0$ per cui l'analisi effettuata al punto (v) risulta valida.

(vii) (**1,5 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il coefficiente della variabile x_1 nella funzione obiettivo cambia da 5 a $5 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ "sufficientemente piccolo".

Esercizio 4. (**5 punti**) L'acciaieria PLASTIK deve evadere un ordine di 1000 tonnellate di acciaio INOX. Per questa produzione servono manganese (almeno l1% in peso), cromo (almeno il 18%) e molibdeno (almeno il 2%). I fornitori di metalli non ferrosi vendono per esigenze di mercato questi prodotti in tre tipi di confezioni differenti. La prima confezione contiene 2 Kg. di manganese, 2 Kg. di cromo e 1 Kg. di molibdeno e costa 10 euro. La seconda confezione contiene 2 Kg. di manganese, 3 Kg. di cromo e 1 Kg. di molibdeno e costa 15 euro. La terza confezione contiene 1 Kg. di manganese, 2 Kg. di cromo e 5 Kg. di molibdeno e costa 20 euro. I dati sono riportati per comodità in tabella

	manganese	cromo	molibdeno	costo
confezione 1	2	2	1	
confezione 2	2	3	1	
confezione 3	1	2	5	

Formulare il modello di Programmazione Lineare per minimizzare il costo di acquisto delle confezioni necessarie per evadere l'ordine.