1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

31 marzo 2014

Cognome	**Nome**

VOTO/31

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**2.5 punti**) La città 1 produce 500 ton di rifiuti al giorno, la città 2 produce 400 ton di rifiuti al giorno. I rifiuti devono essere processati da un inceneritore. Sono disponibili 2 inceneritori che possono trattare fino a 500 ton al giorno di rifuto, producendo un residuo di 0,2 ton per ogni tonellatta di rifiuto trattato. Il costo dell'incenerimento è di 40 euro/ton e 30 euro/ton rispettivamente per l'inceneritore 1 e l'inceneritore 2.

Il residuo di rifiuto prodotto dagli inceneritori deve essere smaltito in una delle due discariche disponibili. Ciascuna discarica può ricevere al massimo 200 ton al giorno. Il costo di trasporto è di 3 euro per Km di percorso e per ton (sia rifiuto solido che residuo). Le distanze sono riportate in tabella

	Inceneritore 1	Inceneritore 2
Città 1	30	5
Città 2	36	42
Discarica 1	5	9
Discarica 2	8	6

Determinare le modalità di smaltimento dei rifiuti a costo minimo.

Esercizio 2. (**8 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\min_{\mathbb{R}^4} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 30 \\ 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 4$$

$$x_1 + 6x_2 + x_3 - 15x_4 = 2$$

$$x_i \geq 0 \; i = 1, 2, 3, 4$$

(i) (**2 punti**) Dire se le condizioni di KKT sono solo necessarie oppure necessarie e sufficienti per il problema.

(ii) (**1 punti**) Determinare se esistono punti di minimo NON vincolato e dire se possono essere minimi del problema vincolato.

(iii) (**3 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (0,\ 2,\ 5,\ 1)^T$.

(iv) (**2 punti**) Calcolare i moltiplicatori di KKT nel punto $\hat{x} = (0,\ 2,\ 5,\ 1)^T$ e dire se le condizioni di KKT sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\min_{\mathbb{R}^4} \quad 20x_1 + 36x_2 + 18x_3 + 15x_4$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 4$$

$$x_1 + 6x_2 + x_3 - 15x_4 = 2$$

$$x_i \geq 0 \; i = 1, 2, 3, 4$$

(i) (**2,5 punto**) Dato il punto $\hat{x} = (0,\ \frac{1}{3},\ 3,\ \frac{1}{5})^T$, determinare una direzione ammissibile e **di discesa** lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Indicare il procedimento per il calcolo del valore dello spostamento massimo $t^{\max}$ per mantenere ammisibilità e non aumento della funzione obiettivo.

(ii) (**2 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**2 punti**) Scrivere le SBA del poliedro in forma standard corrispondenti ai vertici individuati al punto (iii). Scegliere una delle SBA ed indicare le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\min_{\mathbb{R}^4} \quad 20x_1 + 36x_2 + 18x_3 + 15x_4$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 4$$

$$x_1 + 6x_2 + x_3 - 15x_4 = 2$$

$$x_i \geq 0 \ i = 1, 2, 3, 4$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(iv) (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da 2 a $2 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Sia dato il seguente problema di Programmazione lineare intera

$$\max_{\mathbb{R}^2} \quad 4x_1 + 2x_2$$

$$-4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$x_1 + 6x_2 \leq 36$$

$$2x_1 + x_2 \leq 18$$

$$-2x_1 + 15x_2 \geq -15$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x \text{ intero}$$

e siano $(1,\ 0)^T$ e $(\frac{15}{2},\ 3)^T$ rispettivamente una soluzione ammissibile del problema intero e una soluzione ottima del rilassamento lineare

(i) (**1 punti**) Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;

(ii) (**2 punti**) Scrivere i due sottoproblemi generati da un metodo di Branch and Bound

(ii) (**2 punti**) Scegliere uno dei due sottoproblemi e dire se possibile chiuderlo, aggiornare l'ottimo corrente oppure generare ulteriori sottoproblemi.