1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (BATR 9 cfu)

31 marzo 2014

Cognome	**Nome**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO/31

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**4,5 punti**)

$$\min_{I\!R^4} x_1(x_1 - x_2) + x_3(x_3 + x_4) + x_2^2 + \frac{1}{4}x_4^2$$

(i) (**1, punto**) Dire se la funzione è\non è convessa (strettamente o non) giustificando la risposta.

(ii) (**1,5 punti**) Determinare, se esistono, punti stazionari e studiarne la natura.

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere l'approssimazione lineare della funzione nell'intorno del punto $(1,\ 0,\ 1,\ 0)^T$.

Esercizio 2. (**6 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{aligned} \min_{I\!R^4} \quad & x_1(x_1 - x_2) + x_3(x_3 + x_4) + x_2^2 + \tfrac{1}{4}x_4^2 \\ & -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 4 \\ & x_1 + 6x_2 + x_3 - 15x_4 = 2 \\ & x_i \geq 0 \ i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

(i) (**0.5 punti**) Dire se uno dei punti determinati al punto (ii) dell'Esercizio 1 può/non può essere un punto di minimo.

(ii) (**1 punti**) Dire se le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti di minimo globale.

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (0,\ 2,\ 5,\ 1)^T$.

(iv) (**2 punti**) Calcolare i moltiplicatori di KKT nel punto $\hat{x} = (0,\ 2,\ 5,\ 1)^T$ e dire se le condizioni di KKT sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\min_{\mathbb{R}^4} \quad 20x_1 + 36x_2 + 18x_3 + 15x_4$$

$$\begin{aligned} & -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 4 \\ & x_1 + 6x_2 + x_3 - 15x_4 = 2 \\ & x_i \geq 0 \;\; i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

(i) (**2,5 punto**) Dato il punto $\hat{x} = (0,\ \frac{1}{3},\ 3,\ \frac{1}{5})^T$, determinare una direzione ammissibile e **di discesa** lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Indicare il procedimento per il calcolo del valore dello spostamento massimo $t^{\max}$ per mantenere ammisibilità e non aumento della funzione obiettivo.

(ii) (**2 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**2 punti**) Scrivere le SBA del poliedro in forma standard corrispondenti ai vertici individuati al punto (iii). Scegliere una delle SBA ed indicare le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\min_{\mathbb{R}^4} \quad 20x_1 + 36x_2 + 18x_3 + 15x_4$$

$$\begin{aligned} & -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 4 \\ & x_1 + 6x_2 + x_3 - 15x_4 = 2 \\ & x_i \geq 0 \;\; i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(iv) (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da 2 a $2 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Sia dato il seguente problema di Programmazione lineare intera

$$\begin{aligned} \max_{\mathbb{R}^2} \quad & 4x_1 + 2x_2 \\ & -4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ & x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ & -2x_1 + 15x_2 \geq -15 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x \text{ intero} \end{aligned}$$

e siano $(1,\ 0)^T$ e $(\frac{15}{2},\ 3)^T$ rispettivamente una soluzione ammissibile del problema intero e una soluzione ottima del rilassamento lineare

(i) (**1 punti**) Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;

(ii) (**2 punti**) Scrivere i due sottoproblemi generati da un metodo di Branch and Bound

(ii) (**2 punti**) Scegliere uno dei due sottoproblemi e dire se possibile chiuderlo, aggiornare l'ottimo corrente oppure generare ulteriori sottoproblemi.