SIMULAZIONE 1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (BLTR/MMER 9/6 cfu)

6 febbraio 2012

Cognome	Nome	
		VOTO

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

Esercizio 1. (**4.5 punti**) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min_{\mathbb{R}^2} (x_1 - 2x_2)^2$$

(i) (**1.5 punto**) Dire se la funzione è convessa (specificando se strettamente convessa) giustificando la risposta.

(ii) (**2 punti**) Determinare i punti che soddisfano le condizioni necessarie del primo ordine e dire, se possibile, di che punti si tratta (minimi/massimi/sella).

(iii) (**1 punto**) Scrivere l'approssimazione lineare della funzione nell'intorno del punto $(1,\ 0)^T$.

Esercizio 2. (**6 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare (n.b. la funzione obiettivo è la stessa dell'Esercizio 1)

$$\begin{array}{ll} \min & (x_1 - 2x_2)^2 \\ & \\ & -x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & -2x_1 + x_2 \geq 1, \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**0,5 punti**) Dire se si tratta di un problema convesso giustificando la risposta;

(ii) (**1 punti**) Dire se uno dei punti determinato allEsercizio 1(ii) può/non può essere minimo giustificando la risposta (se necessario utilizzare la soluzione grafica).

(iii) (**2 punti**) Dire se esiste una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (-\frac{1}{2},\ 0)^T$.

(iv) (**2,5 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT. Dire se nel punto $\hat{x} = (-\frac{1}{2},\ 0)^T$ sono/non sono verificate, determinando i moltiplicatori.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il poliedro (lo stesso dell'esercizio 2)

$$\begin{aligned}&-x_1 + x_2 \leq 5\\&x_1 + x_2 \leq 8\\&-2x_1 + x_2 \geq 1,\\&x_2 \geq 0\end{aligned}$$

(i) (**1,5 punto**) Dato il punto $\hat{x} = (0,\ 5)^T$, determinare, se esiste, una direzione ammissibile lungo cui é possibile spostarsi attivando un vincolo in piu' rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$.

(ii) (**0,5 punto**) Aggiungere il vincolo $x_1 \geq 0$ e scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$).

(iii) (**3 punti**) Aggiungere il vincolo $x_1 \geq 0$ e scrivere le Soluzioni di Base Ammissibile (SBA) del poliedro in forma standard e i corrispondenti vertici del poliedro originale in $I\!R^2$.

(iv) (**2 punti**) Scegliere una delle SBA ottenute ed indicare nel poliedro in forma standard le variabili di base e fuori base, il loro valore e le matrici di base e fuori base corrispondenti. Supponendo che l'obiettivo sia

$$\min\ x_1 - 2x_2$$

scrivere i coefficienti di costo ridotto nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned}\min\quad & x_1 - 2x_2\\ & -x_1 + x_2 \leq 5\\ & x_1 + x_2 \leq 8\\ & -2x_1 + x_2 \geq 1,\\ & x_2 \geq 0\end{aligned}$$

(i) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema (disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore).

(ii) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema duale.

(iv) (**2 punti**) Dire se e come cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da 5 a $5 - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "piccolo".

Esercizio 5 (5,5 punti)

Si consideri il problema di PL dell'Esercizio 4 con l'aggiunta del vincolo di interezza sulle variabili:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - 2x_2 \\
& -x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1 + x_2 \leq 8 \\
& -2x_1 + x_2 \geq 1, \\
& x_2 \geq 0 \\
& x \text{ intero}
\end{aligned}
$$

Sia assegnato la soluzione ammissibile intera $\hat{x} = (0,\ 5)^T$. (N.B. si tratta di un problema di minimo) Utilizzando ove posisbile i risultati ottenuti nell'esercizio 4:

(i) (0,5 punti) dire qual è il valore dell'ottimo corrente e del lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;

(ii) (1,5 punti) dire se al passo iniziale del metodo di Branch & Bound si può concludere che è stata già determinata la soluzione ottima, o scrivere i due problemi generati dal metodo del Branch and Bound separando rispetto alla variabile x_1;

(iii) (2,5 punti) indicare geometricamente (anche sulla stessa figura) le regioni ammissibili e le soluzioni ottime dei due problemi generati;

(iv) (1 punti) scegliere uno dei due problemi, risolverlo e e dire se è possibile chiuderlo o meno, giustificando la risposta.