1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (BLTR/MMER 9/6 cfu)

9 gennaio 2012

Cognome	Nome

VOTO

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo** [1]

Esercizio 1. (**4.5 punti**) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min_{\mathbb{R}^3} \; \frac{1}{3}x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_1 + 3x_2 + 3x_3$$

(i) (**1.5 punto**) Dire se la funzione è convessa giustificando la risposta.

(ii) (**2 punti**) Determinare i punti che soddisfano le condizioni necessarie del primo ordine e dire, se possibile, di che punti si tratta (minimi/massimi/sella).

(iii) (**1 punto**) Scrivere l'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto $(-1,\ 0,\ 0)^T$.

Esercizio 2. (**6 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare (n.b. la funzione obiettivo è la stessa dell'Esercizio 1)

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{3}x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**0,5 punti**) Dire se si tratta di un problema convesso giustificando la risposta;

(ii) (0,5 punti) Dire se uno dei punti determinato allEsercizio 1(ii) può/non può essere minimo giustificando la risposta.

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (0,\ 1,\ 1)^T$. Indicare il valore del passo $t_{\max}$ per cui si rimane ammissibili.

(iv) (**2,5 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT. Determinare i moltiplicatori nel punto $(0,\ 1,\ 1)^T$ e dire se sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

[1] In tal caso, NON sarà possibile ricevere le informazioni via e-mail, telefono o comunque senza la possibilità di verificare l'identità

Esercizio 3. (7 punti)

Sia dato il poliedro (lo stesso dell'esercizio 2)

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ &x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (**1,5 punto**) Dato il punto $\hat{x} = (0,\ 1,\ 1)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo cui é possibile spostarsi attivando un vincolo in piu' rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$.

(ii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$).

(iii) (**3 punti**) Scrivere i vertici del poliedro originale in $I\!R^3$ e le corrispondenti Soluzioni di Base Ammissibile del poliedro in forma standard.

(iv) (**2 punti**) Scegliere una delle SBA ottenute ed indicare nel poliedro in forma standard le variabili di base e fuori base, il loro valore e le matrici di base e fuori base corrispondenti. Supponendo che l'obiettivo sia

$$\min\ 3x_1 + 5x_2 + \frac{15}{2}x_3$$

scrivere i coefficienti di costo ridotto nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (8,5 punti)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max\quad & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 5 \\ & x_1 + 3x_2 \leq \tfrac{15}{2} \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema (disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore).

(ii) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema duale.

(iv) (**2 punti**) Dire se e come cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da 3 a $3 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "piccolo".

Esercizio 5 (5,5 punti)

Si consideri il problema di PL dell'Esercizio 4 con l'aggiunta del vincolo di interezza sulle variabili:

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1 + 2x_2 \\
 & x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & 2x_1 - x_2 \leq 5 \\
 & x_1 + 3x_2 \leq \frac{15}{2} \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x \text{ intero}
\end{array}
$$

Sia assegnato la soluzione ammissibile intera $\hat{x} = (2,\ 0)^T$.

(a) (i) (0,5 punti) Dire qual è il valore dell'ottimo corrente e dell'upper bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;

(b) (ii) (1,5 punti) utilizzando per il problema rilassato al passo iniziale il risultato ottenuto nell'esercizio 4, dire se si può concludere che è stata già determinata la soluzione ottima, o scrivere i due problemi generati dal metodo del Branch and Bound separndo rispetto alla variabile x_1;

(c) (iii) (2,5 punti) indicare geometricamente (anche sulla stessa figura) le regioni ammissibili e le soluzioni ottime dei due problemi;

(d) (iv) (1 punti) scegliere uno dei due problemi e dire se è possibile chiuderlo o meno, giustificando la risposta.