

1<sup>a</sup> PROVA scritta di  
**RICERCA OPERATIVA (BATR 9 cfu)**  
9 febbraio 2015

**Cognome**

**Nome**

**VOTO**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame,  **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma  **non autorizzo**

**IMPORTANTE:** È possibile mantenere il voto della prova scritta per un **massimo di tre mesi** dalla data in cui è stato sostenuta.

**Esercizio 1. (10 punti)**

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1^2 + 2x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ & x_1 + x_2 \geq -\frac{1}{2} \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) **(1,5 punti)** Dire se il problema è (strettamente) convesso/concavo (NB attenzione si tratta di un problema di max).
- (ii) **(1 punto)** Dire se esistono i punti di minimo NON vincolato.
- (iii) **(2 punti)** Scrivere le Condizioni di KKT. (NB attenzione si tratta di un problema di max).
- (iv) **(2,5 punti)** Determinare, se esiste un punto che soddisfa le condizioni di KKT con  $x_2 = 0$  e il 2<sup>o</sup> vincolo ATTIVO, calcolando i moltiplicatori.
- (v) **(2 punti)** Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto  $\hat{x} = (\frac{1}{3}, -\frac{5}{6})^T$ .
- (v) **(1 punto)** Dire se le condizioni di KKT possono essere soddisfatte nel punto  $\hat{x} = (\frac{1}{3}, -\frac{5}{6})^T$ .

**Esercizio 2. (8 punti)**

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & -30x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & -10x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (3 punti) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{16} \\ \frac{17}{16} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) (3 punto) Individuato al punto (i) un vettore  $\hat{x}$  ammissibile ma NON vertice, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da  $\hat{x}$  attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in  $\hat{x}$ .

Individuare il valore dello spostamento massimo  $t^{\max}$  e il corrispondente punto.

Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa o di salita per la funzione obiettivo.

(iii) (1 punto) Scrivere il poliedro nella forma di minimo con il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del semplice (Ax = b, x ≥ 0 con b ≥ 0).

(iv) (2 punti) Scegliere un vertice individuato al punto (i) e scrivere il corrispondente vertici (SBA) del poliedro in forma standard definito al punto (iii). Indicare le variabili di base e fuori base e il loro valore.

**Esercizio 3. (13 punti)**

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & -30x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & -10x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (1,5 punto) Scrivere il problema duale.

(ii) (2 punti) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (1 punto) Dire se la soluzione ottima del problema duale individuata al punto (ii) è ancora ottima se al problema duale viene aggiunto il vincolo di interezza sulle variabili.

(iv) (3 punti) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(v) (1,5 punti) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da 2 a  $2 + \varepsilon$  con  $\varepsilon > 0$  "sufficientemente piccolo".

- (vi) **(2,5 punti)** Dire se e come è possibile individuare l'intervallo di valori di  $\varepsilon > 0$  per cui l'analisi effettuata al punto (v) risulta valida.
- (vii) **(1,5 punti)** Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il coefficiente della variabile  $x_1$  nella funzione obiettivo cambia da  $-30$  a  $-30 + \varepsilon$  con  $\varepsilon > 0$  e "sufficientemente piccolo".