1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

9 febbraio 2015

Cognome	Nome

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un **massimo di tre mesi** dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**8 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$
\begin{array}{ll}
\max & -x_1^2 + 2x_1 + x_2 \\
 & \\
 & 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\
 & -x_1 + 2x_2 \geq -2 \\
 & x_1 + x_2 \geq -\frac{1}{2} \\
 & x_1 \geq 0
\end{array}
$$

(i) (**1,5 punti**) Dire se il problema è (strettamente) convesso/concavo (NB attenzione si tratta di un problema di max).

(ii) (**1 punti**) Dire se esistono i punti di minimo NON vincolato.

(iii) (**1 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT. (NB attenzione si tratta di un problema di max).

(iv) (**2 punti**) Determinare, se esiste un punto che soddisfa le condizioni di KKT con $x_2 = 0$ e il 2^0 vincolo ATTIVO, calcolando i moltiplicatori.

(v) (**2 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (\frac{1}{3}, \ -\frac{5}{6})^T$.

(v) (**0,5 punti**) Dire se le condizioni di KKT possono essere soddisfatte nel punto $\hat{x} = (\frac{1}{3}, \ -\frac{5}{6})^T$.

Esercizio 2. (**6 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & -30x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & -10x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**2 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{16} \\ \frac{17}{16} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) (**2 punto**) Individuato al punto (i) un vettore $\hat{x}$ ammissibile ma NON vertice, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$.

Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$ e il corrispondente punto.

Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa o di salita per la funzione obiettivo.

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**1,5 punti**) Scegliere un vertice individuato al punto (i) e scrivere il corrispondente vertici (SBA) del poliedro in forma standard definito al punto (iii). Indicare le variabili di base e fuori base e il loro valore.

Esercizio 3. (**12 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & -30x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & -10x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (**1 punti**) Dire se la soluzione ottima el problema duale individuata al punto (ii) è ancora ottima se al problema duale viene aggiunto il vincolo di interezza sulle variabili.

(iv) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(v) (**1,5 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da 2 a $2 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ "sufficientemente piccolo".

(vi) (**1,5 punti**) Dire se e come è possibile individuare l'intervallo di valori di $\varepsilon > 0$ per cui l'analisi effettuata al punto (v) risulta valida.

(vii) (**1,5 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il coefficiente della variabile x_1 nella funzione obiettivo cambia da -30 a $-30 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 4. (**5 punti**) Un'azienda deve organizzare il trasporto di un prodotto P_1 dagli impianti di produzioni ai centri di vendita. Gli impianti di produzione sono due: I_1, I_2 e si producono rispettivamente 1500 e 2500 unità di prodotto. Tutto il prodotto deve essere trasportato ai centri di vendita che sono quattro V_i, $i = 1, \ldots, 4$. I centri di vendita non hanno una richiesta specifica di quantità di prodotto. Tuttavia la diversa posizione geografica consente un prezzo di vendita differenziato nei 4 centri che è rispettivamnete 25, 27, 21, 28 euro/unità. Tutto il prodotto trsportato in un centro V_i è venduto producendo un ricavo. Il trasporto ha due tipologie di costo. Un costo unitario che dipende dalle unità trasportate e dal percorso effettuato ed è riportato in tabella (euro/unità).

costo	V_1	V_2	V_3	V_4
I_1	0,5	1,2	2	1,8
I_2	1,2	1	1,6	2

Inoltre è necessario pagare un costo aggiuntivo indipendente dalla quantità trasportata che è relativo al pagamento del mezzo di trasporto. Tale costo è di 150 euro per viaggio. Ogni origine destinazione può essere coperta con un solo viaggio e il mezzo di trasporto ha una capacità massima pari a 600 unità. Formulare un modello di Programmazione Lineare Intera che consenta di massimizzare i guadagni (ricavo - costi)