1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (6 MMER - 9 BLTR cfu)

12 luglio 2012

Cognome	Nome

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

Esercizio 1. (4.5 punti)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \ 2x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - x_1x_3 + x_2x_3 + 4x_1 + 2x_2$$

(i) (**1.5 punto**) Dire se la funzione è convessa o strettamente convessa giustificando la risposta.

(ii) (**2 punti**) Determinare i punti che soddisfano le condizioni necessarie del primo ordine e stabilire se possibile, utilizzando le condizioni del secondo ordine, di che tipo di soluzioni si tratta (minimi/massimi/sella).

(iii) (**1 punto**) Scrivere l'approssimazione lineare della funzione nell'intorno del punto $(0,\ 2,\ 1)^T$.

Esercizio 2. (6 punti)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare (n.b. la funzione obiettivo è la stessa dell'Esercizio 1)

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - x_1x_3 + x_2x_3 + 4x_1 + 2x_2 \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) (**0,5 punti**) Dire se i punti determinati all'Esercizio 1(ii) possono (non possono) essere minimo giustificando la risposta.

(ii) (**0.5 punti**) Dire se le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti per l'ottimalità.

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\bar{x} = (0,\ 3,\ 1)^T$. Indicare il valore del passo $\alpha_{\max}$ per cui si rimane ammissibili.

(iv) (**2,5 punti** Scrivere le Condizioni di KKT. Determinare i moltiplicatori nel punto $\bar{x} = (0,\ 3,\ 1)^T$ e dire se sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il poliedro (n.b.: è il poliedro dell'Esercizio 2)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

(i) (**1,5 punto**) Dato il punto $\bar{x} = (0,\ 3,\ 1)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo cui é possibile spostarsi attivando un vincolo in piu' rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$.

(ii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$).

(iii) (**3 punti**) Scrivere i vertici del poliedro originale in $I\!R^3$ e le corrispondenti Soluzioni di Base Ammissibile del poliedro in forma standard.

(iv) (**2 punti**) Scegliere una delle SBA ottenute ed indicare nel poliedro in forma standard le variabili di base e fuori base, il loro valore e le matrici di base e fuori base corrispondenti. Supponendo che l'obiettivo sia

$$\max x_1 - 2x_2 - 5x_3$$

scrivere i coefficienti di costo ridotto nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (P) (n.b.: la regione ammissibile è la stessa dell'Esercizio 2)

$$\begin{aligned} \max \quad & \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 - 6x_3 \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) (**1,5 punti**) Scrivere il problema duale

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale (disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore).

(ii) (**3 punti**) Determinare la soluzione ottima del primale utilizzando la teoria della dualità (le condizioni di ottimo per la PL).

(iii) (**2 punti**) Dire se e come cambia la soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da 1 a $1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "piccolo".

Esercizio 5 (5,5 punti)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{array}{ll} \min & 2u_1 + u_2 \\ & \\ & u_1 + u_2 \geq \frac{1}{2} \\ & -u_1 + 2u_2 \geq -\frac{3}{2} \\ & 3u_1 - 5u_2 \geq -6 \\ & u_1 \geq 0 \\ & u \text{ intero} \end{array}$$

(a) (2,5 punti) Partendo dalla soluzione del problema rilassato, determinare il valore dell'ottimo corrente e dell'upper bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;

(b) (3 punti) Partendo dalla soluzione del problema rilassato, definire se possibile i primi due problemi generati dal metodo del Branch and Bound separando rispetto ad una variabile oppure giustificare se si può concludere che è stata già determinata la soluzione ottima.