1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

3 novembre 2014

Cognome	**Nome**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO/31

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**2.5 punti**)

Un'industria alimentare produce cibo per animali. Deve pianificare la produzione giornaliera di due nuovi prodotti in scatola (S1,S2) che ottiene miscelando 3 prodotti base (B1,B2,B3). I due prodotti devono contenere un quantitativo percentuale minimo di carne e vengono venduti al prezzo (p_j) riportato in tabella:

	% min carne ($pmin_j$)	prezzo (p_j)
S1	7	16
S2	8	18

La tabella che segue riporta il contenuto percentuale ($perc_i$) di carne presente nei 3 componenti base, insieme al costo (c_i) unitario (euro/kg) e la quantità massima (q_i) disponibile giornalmente(in kg).

	B1	B2	B3
$perc_i$	6	8	9
costo c_i	1	1.5	2.5
quantità q_i	110	80	60

Inoltre il prodotto S2 deve contenere almeno il 20% del prodotto di base B3. Formulare un modello lineare che permetta di pianificare la produzione dei due prodotti S1 e S2 in modo da massimizzare il profitto.

Esercizio 2. (**8 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare (n.b. la funzione obiettivo è quella dell'Esercizio 1 con $\alpha = 4$)

$$\begin{aligned} \min_{I\!R^2} \quad & \tfrac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + \alpha x_2^2 + 2x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq -4 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

in cui $\alpha \in I\!R$ è un parametro.

(i) (**2 punti**) Dire per quali valori di α il problema è convesso, strettamente convesso, non convesso.

(ii) (**1,5 punti**) Fissato $\alpha = 3$, dire se esiste un punto di minimo globale del problema non vincolato e se può essere punto di minimo anche del problema vincolato.

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (4,\ 0)^T$.

(iii) (**2 punti**) Scrivere le condizioni di KKT, dire se nel punto $\hat{x} = (4,\ 0)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta e calcolare i moltiplicatori.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (**1,5 punto**) Dato il punto $\hat{x} = (\frac{1}{6},\ 0, \frac{4}{3})^T$, determinare, se esiste, una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$.

(ii) (**3 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**2 punti**) Scrivere le SBA del poliedro in forma standard corrispondenti ai vertici individuati al punto (iii). Scegliere una delle SBA ed indicare le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (NB è il problema dell'Esercizio 3)

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(iv) (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da -1 a $-1+\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Si consideri il problema di programmazione lineare intera

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 - x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq -4 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x \text{ intero} \end{array}$$

Sia $\hat{x} = (2,\ 1)^T$ una soluzione ammissibile intera.

Rispondere ai seguenti quesiti.

(i) (**0,5 punti**) Dire qual è il valore di upper e lower bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound (è possibile usare la soluzione grafica);

(ii) (**0,5 punti**) dire se si può concludere che è stata già determinata la soluzione ottima, o scegliere una variabile di branching e scrivere i primi due problemi generati per separazione rispetto a tale variabile;

(iii) (**2 punti**) indicare geometricamente (anche sulla stessa figura) le regioni ammissibili e le eventuali soluzioni ottime dei due sottoproblemi;

(iv) (**2 punti**) scegliere uno dei due problemi e dire se è possibile chiudere il problema, o aggiornare l'ottimo corrente o altro.