SIMULAZIONE 1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

19 dicembre 2012

Cognome	Nome
TESTO con SOLUZIONE	

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, autorizzo al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (4.5 punti) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min_{\mathbb{R}^2} (x_1 - x_2^2 - 1)^2 + x_1 x_2^2$$

(i) (1,5 punto) Dire se la funzione è\non è convessa giustificando la risposta.

(ii) (1,5 punti) Dato il punto $(1\ ,0)^T$, dire, se possibile, di che tipo di punto si tratta (minimo/massimo/sella).

(iii) (1,5 punto) Scrivere l'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto $(0,\ 1)^T$ e dire se ammette minimo globale.

Esercizio 2. (6 punti)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare (n.b. la funzione obiettivo è la stessa dell'Esercizio 1)

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - x_2^2 - 1)^2 + x_1 x_2^2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & -5x_1 + 2x_2 \geq -5 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (0,5 punti) Dire se il punto $(1\ ,0)^T$ è\non è minimo giustificando la risposta.

(ii) (0.5 punti) Dire se il problema è\non è convesso.

(iii) (2,5 punti) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (0,\ \frac{1}{2})^T$. Indicare il valore del passo $t_{\max}$ per cui si rimane ammissibili.

(iv) (2,5 punti) Scrivere le Condizioni di KKT e dire se nel punto $(0,\ \frac{1}{2})^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Esercizio 3. (7 punti)

Sia dato il poliedro

$$\begin{aligned} &y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 1 \\ &2y_1 + 2y_2 - y_3 = 1 \\ &y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) **(1,5 punto)** Dato il punto $\hat{y} = (0,\ 2, 3)^T$, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{y}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{y}$.

(ii) **(0,5 punto)** Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ay = b,\ y \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iii) **(3 punti)** Scrivere i vertici del poliedro originale e le corrispondenti Soluzioni di Base Ammissibile del poliedro in forma standard.

(iv) **(2 punti)** Scegliere una delle SBA ottenute ed indicare nel poliedro in forma standard le variabili di base e fuori base, il loro valore e la matrici di base corrispondente. Considerato poi l'obiettivo max $y_1 - 5y_2 - 4y_3$, scrivere il vettore dei costi ridotti nella SBA scelta (senza sviluppare i calcoli nel dettaglio).

Esercizio 4. (8,5 punti)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 + x_2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & -5x_1 + 2x_2 \geq -5 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) **(2 punti)** Risolvere graficamente il problema: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(ii) **(1,5 punto)** Scrivere il problema duale.

(iii) **(3 punti)** Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema duale.

(iv) **(2 punti)** Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da -1 a $-1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

Esercizio 5 (5 punti)

Si consideri il problema di PL dell'Esercizio 4 con l'aggiunta del vincolo di interezza sulle variabili:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 + x_2 \\
& x_1 - 2x_2 \leq -1 \\
& -5x_1 + 2x_2 \geq -5 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x \text{ intero}
\end{aligned}
$$

Sia $\hat{x} = (0,\ 1)^T$ una soluzione ammissibile intera.

(i) **(0,5 punti)** Dire qual è il valore dell'ottimo corrente e dell'upper bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound;

(ii) **(0,5 punti)** dire se si può concludere che è stata già determinata la soluzione ottima, o sceglier una variabile di branching e scrivere i primi due problemi generati per separazione rispetto a tale variabile;

(iii) **(2 punti)** indicare geometricamente (anche sulla stessa figura) le regioni ammissibili e le soluzioni ottime dei due problemi;

(iv) **(2 punti)** scegliere uno dei due problemi e analizzarlo (dire se è possibile chiudere il problema, o aggiornare l'ottimo corrente o altro).

ESERCIZIO 1

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2^2 - 1) + x_2^2 \\ -4x_2(x_1 - x_2^2 - 1) + 2x_1x_2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & -2x_2 \\ -2x_2 & 12x_2^2 - 2x_1 + 4 \end{pmatrix}$$

ii)

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ candidato p.to minimo

p.to stazionario

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \succ 0$$ minimo locale stretto

i) $\nabla^2 f \nsucceq 0 \ \forall x$ (ad es. $x_2 = 0$ $x_1 \geq 2$) la funzione non è convessa

iii) $$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \nabla^2 f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix} \succ 0$$

$$f(\hat{x}) = 4$$

l'approssimazione quadratica ammette un unico punto di minimo globale

$$q_k(x) = 4 + \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 2

i) $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ verifico ammissibilità $\quad 1 \leq -1$ NO

NON può essere minimo $\quad -5 \geq -5$

in quanto non è ammissibile. $\quad 1 \geq 4$

ii) Dall'ES 1 la f.o. non è convessa su $\mathbb{R}^2$.
Salvo studiare $\nabla^2 f$ su l'insieme ammissibile non si può concludere che sia convesso.

Es. 2 (III)

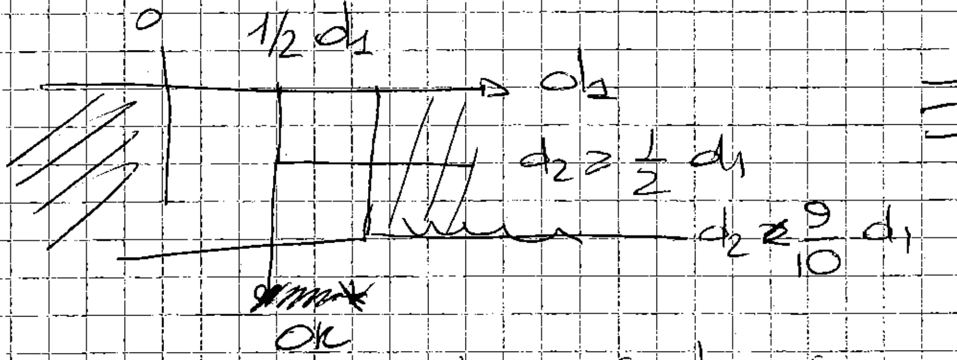
$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ punto ammissibile ok

$-1 \le -1$
$1 \ge -5$
$\frac{1}{2} \le 4$
$0 \ge 0$

$I(\hat{x}) = \{1, 4\}$

$\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -9/4 \\ 5/2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \nabla f(\hat{x})^T d < 0 \\ a_1^T d \le 0 \\ a_4^T d \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -9 d_1 + 10 d_2 < 0 \\ d_1 - 2 d_2 \le 0 \\ d_1 \ge 0 \end{cases}$



$\exists \bar{d}$; ad es.

$\bar{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$y = \hat{x} + t\bar{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} + \frac{t}{2} \end{pmatrix}$ $\quad t^{max}$ per ammiss.

$J \notin I(\hat{x}) \quad \begin{cases} a_2^T y \ge -5 \\ a_4^T y \le 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -5t + 1 + t \ge -5 \\ t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t \le 4 \end{cases}$

$\begin{cases} -4t \ge -6 & t \le 3/2 \\ \frac{3}{2} t \le \frac{3}{2} & t \le 1 \end{cases} \quad \boxed{t^{max} = 1}$

(iv) non resteranno soddisfatte.

$\nabla L = 0 \quad \begin{pmatrix} -9/4 \\ 5/2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1(-1-x_1+2x_2)=0 \quad \lambda_2(-5x_1+2x_2+5)=0$

$\lambda_3(4-x_1-x_2)=0 \quad \lambda_4 x_1=0$

$\lambda_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4 \quad$ + AMMISS.

$\forall i \notin I(\bar{x}) \ \lambda_i=0 \Rightarrow \lambda_2=\lambda_3=0$

$\begin{cases} -\frac{9}{4}+\lambda_1-\lambda_4=0 \\ 5/2-2\lambda_1=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda_4=\frac{5}{4}-9/4=-1<0 \text{ NO!} \\ \lambda_1=\frac{5}{4} \end{matrix}$

and.

ESERCIZIO 3

i) $I(\hat{y})=\{2,3\} \quad \begin{cases} a_2^T d=0 \\ a_3^T d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2d_1+2d_2-d_3=0 \\ d_1=0 \end{cases}$

$\bar{d}=\pm\begin{pmatrix}0\\t\\2t\end{pmatrix} \ \forall t \geq 0$

$i \notin I(\hat{y}) \quad a_i^T d$

$a_1^T d=\pm(5t+2t)$

$a_4^T d=\pm t$

$a_5^T d=\pm 2t$

scegliendo ad es.

$\bar{d}=-\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ attivo un vincolo in più.

ii)

$y_1+5y_2+y_3-y_4=1$

$2y_1+2y_2-y_3=1$

$y_i \geq 0 \quad i=1,..4$

iii) VERTICI

$\{1,2,3\}$ NO; $\{1,2,4\}$ SI; $\{1,2,5\}$ SI, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,5\}$

$\begin{cases} 5y_2+y_3=1 \\ 2y_2-y_3=1 \\ y_1=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} y_2=2/7 \\ y_3=-3/7 \text{ NO} \end{matrix}, \quad \begin{cases} y_1+y_3=1 \\ 2y_1-y_3=1 \\ y_2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1=2/3 \\ y_3=1/3 \\ y_2=0 \end{cases}$ SI $v=\begin{pmatrix}2/3\\0\\1/3\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 = 1 \\ 2y_1 + 2y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 8y_2 = 1 \\ y_1 = \frac{1 - 1/4}{2} \\ y_3 = 0 \end{cases} \quad \text{SI} \quad v^2 = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_3 = 1 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \text{NO} \; ; \; \begin{cases} y_2 = 1/2 \\ y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \text{SI} \quad v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{cases} y_1 = 1/2 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \text{NO}$$

Ho 3 vertici

$$v^1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} ; \quad v^2 = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le SBA corrispondenti sono.

$$SBA^1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad SBA^2 = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad SBA^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

(iv) $SBA^{(1)}$ $\quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad C_N = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^T = C_N^T - C_B^T B^{-1} N = \begin{pmatrix} -5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

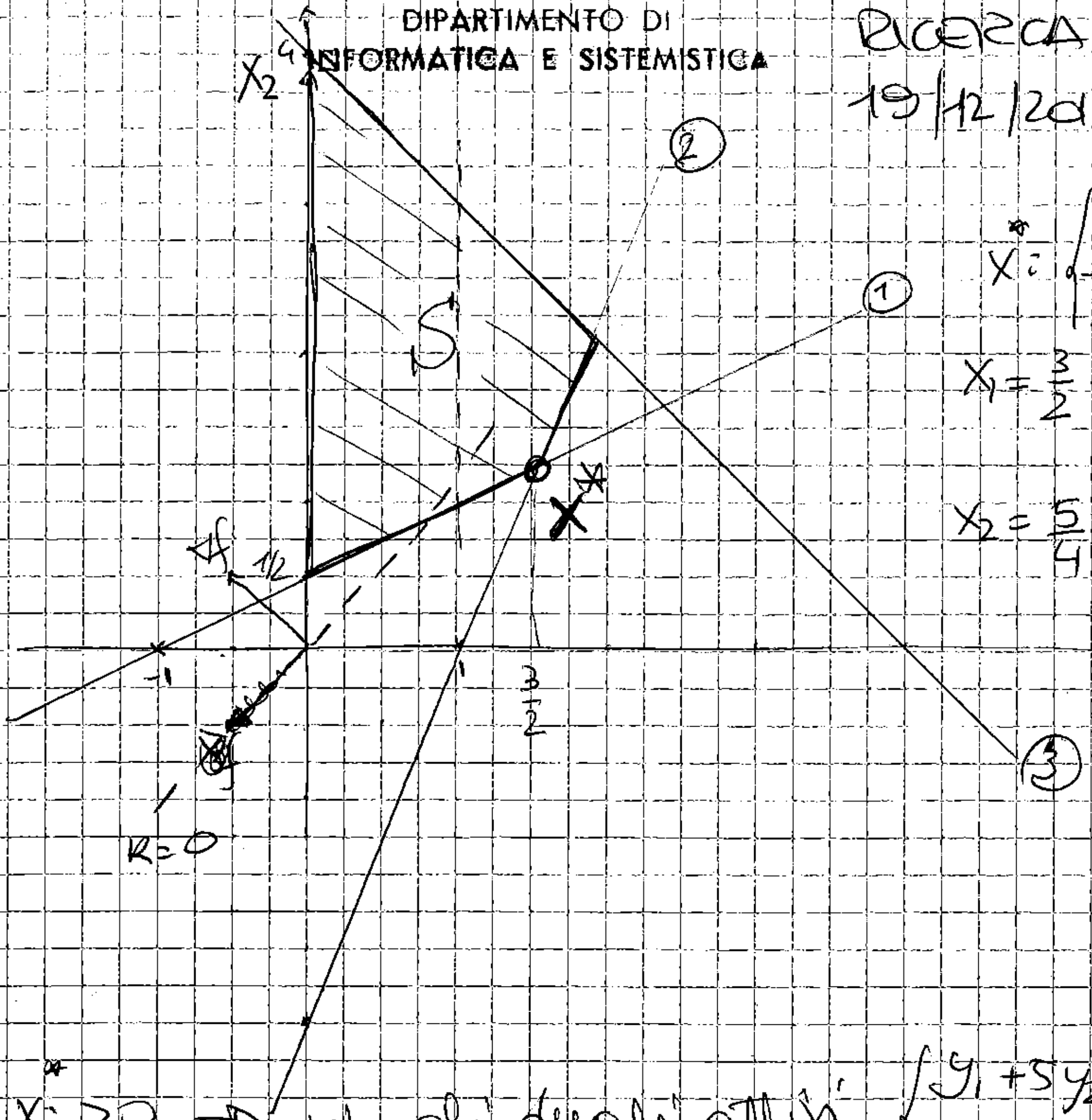
ESERCIZIO 3

ii) Trasformo in forma "standard" per costruzione duale

$$\max \; x_1 - x_2 \qquad\qquad \min \; -y_1 + 5y_2 - 4y_3$$
$$x_1 - 2x_2 \le -1 \qquad\qquad y_1 + 5y_2 + y_3 \ge 1$$
$$5x_1 - 2x_2 \le 5 \qquad\qquad -2y_1 - 2y_2 + y_3 = -1$$
$$x_1 + x_2 \le 4 \qquad\qquad y \ge 0$$
$$x_1 \ge 0$$

RICERCA OPERATIVA 19/12/2012 (2)

i)



x^*: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -5x_1 + 2x_2 = -5 \end{cases}$

$x_1 = \frac{3}{2}$ $\quad x^* = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/4 \end{pmatrix}$

$x_2 = \frac{5}{4}$ $\quad c^T x^* = -1/4$

$\Rightarrow x_2$

iii) $x_i^* > 0 \Rightarrow$ vincoli duali attivi $\begin{cases} y_1 + 5y_2 + y_3 = 1 \\ -2y_1 - 2y_2 + y_3 = -1 \end{cases}$

$I(x^*) = \{1,2\} \Rightarrow y_3^* = 0 \quad y_2^* = \frac{1}{8} \quad y_1^* = 3/8$

$\begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/8 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad b^T y^* = -\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$ (Ok! ATTENZIONE primale è MIN duale ottenuto in forma MAX)

NB è uno dei vertici dell'ES. 3

(iv) $\lambda_1^* = \frac{3}{8} \quad c^T x_\varepsilon^* = b^T y^* + \lambda_1^* \varepsilon = c^T x^* + \frac{3}{8}\varepsilon$

$\left[\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = -5 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \quad 7x_2 = 15 \quad \begin{cases} x_1 = 4 - \frac{15}{7} = \frac{13}{7} = 1,\dots \\ x_2 = \frac{15}{7} = 2,\dots \end{cases} \right.$

ESERCIZIO 5

i) si tratta di pb di minimo $\Rightarrow$

$$c^T x^* \leq c^T x_I^* \leq c^T \hat{x}_I$$

RILASS LOWER BOUND — AMMISS UPPER BOUND = ottimo corrente

$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ AMMISS e INTERO $c^T \hat{x}_I = 1 = UB =$

$x^* = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/4 \end{pmatrix}$ SOLUZ Pb RILASS $c^T x^* = -\frac{1}{4} = UB$

ii) non posso concludere nulla sull'ottimalità della soluz. corrente. DIVIDO rispetto x_1 ottenendo

(P_1): P_0 + $x_1 \leq \lfloor x_1^* \rfloor = 1$

(P_2): P_0 + $x_1 \geq \lceil x_1^* \rceil = 2$

Pb) non vuoto — Pb. VUOTO - si chiude

ottimo

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

INTERO $c^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

migliore ottimo corrente, aggiorno e chiudo

Soluzione ottima PLI $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $c^T \hat{x} = 0$ -