18/9/2014 ①

ESERCIZIO 1

- VARIABILI X_{ij} = q.tà CARBONE da miniera i a cliente j

$i = 1,2,3$ $j = 1,2,3,4$

NON NEGATIVE $X_{ij} \geq 0$

- VINCOLI

CAPACITÀ PRODUTTIVA MINIERA (MASSIMA)

$$\sum_{j=1}^{4} X_{ij} \leq Q_i \quad \forall i = 1,2,3 \quad \begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 120 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 100 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 140 \end{cases}$$

RICHIESTA DEI CLIENTI (MINIMA)

$$\sum_{i=1}^{3} X_{ij} \geq R_j \quad \forall j = 1,2,3,4 \quad \begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 80 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 70 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 60 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 40 \end{cases}$$

CONTENUTO ZOLFO e CENERE

Siano z_i $i=1,2,3$ contenuto zolfo per ton per miniera i

c_i $i=1,2,3$ " cenere " "

$$\sum_{i=1}^{3} z_i X_{ij} \leq 0{,}06 \cdot \sum_{i=1}^{3} X_{ij} \quad \forall j = 1, \dots 4$$ contenuto max % zolfo

$$\sum_{i=1}^{3} c_i X_{ij} \leq 0{,}035 \sum_{i=1}^{3} X_{ij}$$

- FUNZIONE OBIETTIVO → min Costi

Costi ESTRAZIONE CE_i $i=1,2,3$

$$\sum_{i=1}^{3} CE_i \cdot \sum_{j=1}^{4} X_{ij}$$

COSTI TRASPORTO CT_{ij} $i=1..3$ $j=1..4$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} CT_{ij} \cdot X_{ij}$$

ESERCIZIO 2

i) La f.o. è quadratica con $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Analizzo i minori

$q_{11} = 1 > 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0 \quad \det Q = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 > 0$

$Q > 0$ def. pos. quindi f. è strettamente convessa

L'insieme ammissibile è un poliedro $\rightarrow$ convesso

Il pb è strettamente convesso

ii) La f.o. è quadratica strett. convessa $\Rightarrow \exists!$ minimo globale non vincolato che si trova annullando il gradiente: $\nabla q(x) = Qx + c = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 20 = 0 \\ 2x_2 + 2 = 0 \\ x_1 + 3x_3 + 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1^* = -15 \quad x_2^* = -1 \quad x_3^* = -5 \qquad \begin{pmatrix} -15 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = x^*$$

iii) $\hat{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad I(\hat{x}) = \{2, 4\}$

$$\begin{cases} a_2^T d = 0 \\ a_4^T d \geq 0 \\ \nabla f(\hat{x})^T d < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2d_1 - d_2 + 3d_3 = 0 \\ d_3 \geq 0 \\ 18 d_1 - 6 d_2 + 20 d_3 < 0 \end{cases}$$

$\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix}$

Posso considerare 2 casi: 1) $d_3 = 0$ 2) $d_3 > 0$

$d_3 = 0 \quad \begin{cases} d_2 = 2d_1 \\ 18d_1 - 12d_1 < 0 \end{cases} \quad d_2 = 2d_1 \quad d_1 < 0 \qquad \bar{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è DIR. AMM. DISC.

Ho trovato $\bar{d}$, non analizzo caso $d_3 > 0$.

iv) Poiché dal (iii) $\exists$ $\bar{x}$ AMM. e DISC, le KKT non sono soddisfatte

$$\begin{pmatrix}18\\-6\\20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}\lambda_1-\begin{pmatrix}+1\\0\\0\end{pmatrix}\lambda_2-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\lambda_3+\begin{pmatrix}+2\\-1\\+3\end{pmatrix}\mu=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1(-x_1-2x_2-x_3+10)=0 \quad \lambda_2 x_1=0 \quad \lambda_3 x_3=0$

$\lambda_i \geq 0 \quad (Ax \geq b \quad Dx=d$ AMMISSIBILITÀ$)$

$$\begin{cases}18+\lambda_1-\lambda_2+2\mu=0\\-6+2\lambda_1-\mu=0\\20+\lambda_1-\lambda_3+3\mu=0\end{cases} \qquad \begin{cases}18+\lambda_1-\lambda_2+2(2\lambda_1-6)=0\\\mu=2\lambda_1-6\\20+\lambda_1-\lambda_3+3(2\lambda_1-6)=0\end{cases}$$

$I(\bar{x})=\{2,4\} \Rightarrow \lambda_1^*=0 \quad \lambda_3^*=0$

$18-\lambda_2-12=0 \qquad \lambda_2=6$

$\mu=-6$

$20-18=0$ IMPOSSIBILE !

ESERCIZIO 3

risolvo il problema per usi futuri

$$\max \; 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

(I) $\hat{x} = (5 \; 2 \; 0)$ ammissibile ✓ $I(\hat{x}) = \{(2), 5\}$

per essere ammissibile e, al contempo, non disattivare i vincoli preesistenti, la direzione $d = (d_1 \; d_2 \; d_3)^T$ deve soddisfare $\begin{cases} a_2^T d = 0 \\ a_5^T d = 0 \end{cases}$

ossia $\begin{cases} 2d_1 - d_2 + 3d_3 = 0 \\ d_3 = 0 \end{cases}$ dunque $d = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

per attivare un altro vincolo deve essere $a_j^T d < 0$ per $j \in I(\hat{x})$ (almeno uno)

$-\alpha - 4\alpha < 0$ VEL $\alpha < 0$ VEL $2\alpha < 0$

$\alpha > 0$ $\alpha < 0$ $\alpha < 0$

scelgo $\alpha < 0$ (potenzialmente attivabili 3 o 4)

ad esempio $\bar{d} = (-1 \ -2 \ 0)^T \Rightarrow \bar{z} = \hat{x} + t\bar{d} = \begin{pmatrix} 5-t \\ 2-2t \\ 0 \end{pmatrix}$

sostituendo nei vincoli non attivi su $\hat{x}$:

$$\begin{cases} -5+t-4+4t \geq -10 \iff t \geq -1/5 \text{ sempre vero} \\ 5-t \geq 0 \iff t \leq 5 \\ 2-2t \geq 0 \iff t \leq 1 \end{cases}$$

questo viene violato per primo, dunque $t_{max} = 1$

$\Rightarrow \hat{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $I(\hat{z}) = \{(2), 4, 5\}$ ✓

amissibile

(II) per essere vertice di punto deve essere amissibile e verificare $rk[A_{I(x)}] = n = 3$. Esamineo i punti:

- $(5 \ 2 \ 0)^T$ amissibile $I = \{2, 5\}$ $rk A_I < 3$ NO (solo 2 v. attivi)

$V_1 = (\frac{26}{5} \ \frac{12}{5} \ 0)^T$ amissibile $I = \{1, 2, 5\}$ $rk \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} = 3$ OK

$(1 \ 0 \ 2)^T$ amissibile $I = \{2, 4\}$ solo 2 v. attivi $\Rightarrow rk A_I < 3$ NO

$V_2 = (4 \ 0 \ 0)^T$ amissibile $I = \{2, 4, 5\}$ $rk \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$ OK

(III) MAX $5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(IV) $V_1 = \begin{pmatrix} 26/5 \\ 12/5 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow SBA_1 = \begin{pmatrix} 26/5 \\ 12/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

inserisco i vertici nelle eq. di vincolo standard

$V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow SBA_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

scelgo di studiare $V_2 \leftrightarrow SBA_2$

$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad c_B^T = (5\ 0) \quad c_N^T = (12\ 4)$

$$\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} b = (12\ 4) - (5\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

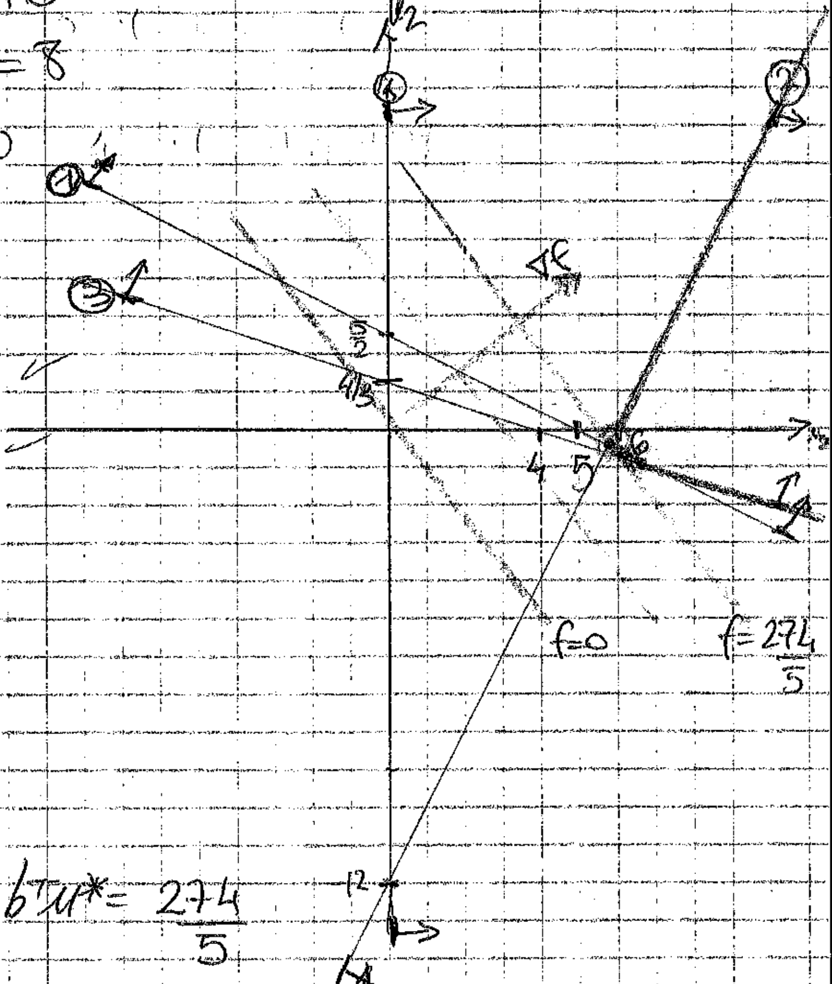
$$= (12\ 4) - (5\ 0)\begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/2 \\ -15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/2 \\ -7/2 \end{pmatrix}$$

che non è ≤ 0 (è il probl. è di max), dunque non si può concludere niente sulla natura di SBA_2

ESERCIZIO 4

$$\begin{aligned} \text{MAX } & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$



Ⓘ
$$\begin{aligned} \text{MIN } & 10u_1 + 8u_2 \\ & u_1 + 2u_2 \ge 5 \\ & 2u_1 - u_2 \ge 12 \\ & u_1 + 3u_2 \ge 4 \\ & u_1 \ge 0 \end{aligned}$$

Ⓘⓘ ottimo su u^* $\begin{cases} u_1 + 2u_2 = 5 \\ 2u_1 - u_2 = 12 \end{cases}$

$$\Rightarrow u^* = \begin{pmatrix} 29/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} \qquad b^T u^* = \frac{274}{5}$$

Ⓘⓘⓘ per la teoria della dualità devono valere:

$x_3^* \, (\underbrace{4 - u_1^* - 3u_2^*}_{= -0.6 \text{ NON ATTIVO}}) = 0$ compl. (D)

$\underbrace{u_1^*}_{\neq 0} \, (10 - x_1^* - 2x_2^* - x_3^*) = 0$ compl. (P)

$2x_1^* - x_2^* + 3x_3^* = 8$ ammissibilità (P)

che si traducono su $\begin{cases} x_3^* = 0 \\ x_1^* + 2x_2^* + x_3^* = 10 \\ 2x_1^* - x_2^* + 3x_3^* = 8 \end{cases} \Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} 26/5 \\ 12/5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c^T x^* = \frac{274}{5} = b^T u^*$ ok, verifica dualità forte

Ⓘⓥ il cambio di b_2 su $b_2' = 8 + \varepsilon$ si traduce su un cambio della regione ammissibile di (P) (e dunque non è detto che x^* sia ammiss. e/o ottimo) e della funzione di (D).

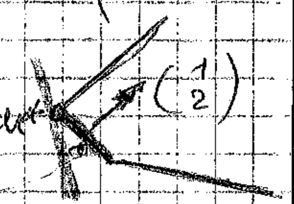
continua...

BONGIOLINI GIACOMO 1390589

FOGLIO 3/3

ES. 4 (→ continua)

La regione ammissibile di (D) non cambia, dunque u^* è sicuramente ammissibile.



Finché le rette di livello non si sovrappongono al lato (questo avviene se $\begin{pmatrix}10\\8+\varepsilon\end{pmatrix} // \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, ossia per $\varepsilon = 12$) u^* rimane ottima. Supponiamo ε suff. piccolo ($\varepsilon < 12$). Dunque cambia solo il valore dell'f. obb. cioè

$$b^T u^* = 10 u_1^* + (8+\varepsilon) u_2^* = \frac{274}{5} - \frac{2}{5}\varepsilon = c^T x_\varepsilon'^*$$

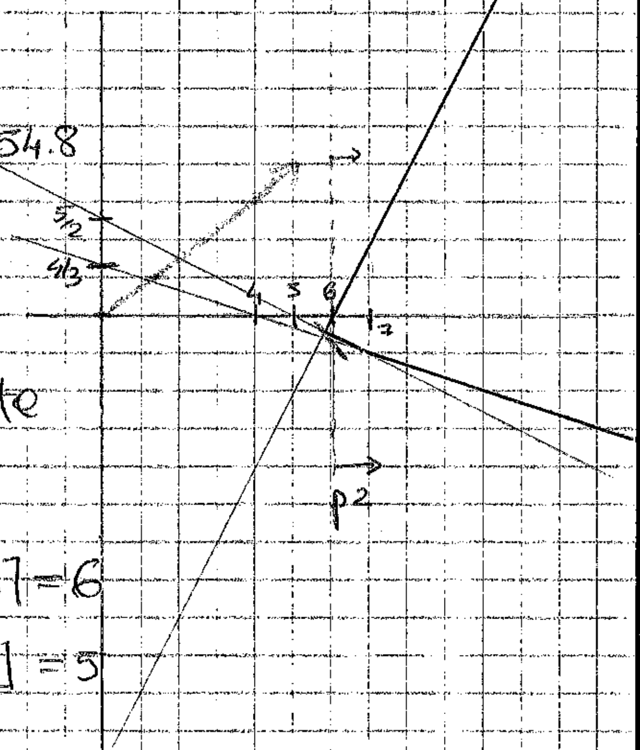
uguale al max ottimo (DUAL. FORTE) del (P) (x_ε dipende da ε).

Dunque $u_2^* = -\frac{2}{5}$ è il PREZZO OMBRA associato al vincolo in questione.

ESERCIZIO 5

$x_r^0 = \left(\frac{29}{5}\ \ -\frac{2}{5}\right)^T \to c^T x_r^0 = 274/5 \approx 54.8$

$x_I = (7\ \ 0) \to c^T x_I = 70$



(I) $\Rightarrow$ x_r^0 lower bound,

x_I upper bound e ottimo corrente

$\Rightarrow \quad 54.8 \le c^T x^* \le 70$

ottimo di PLI

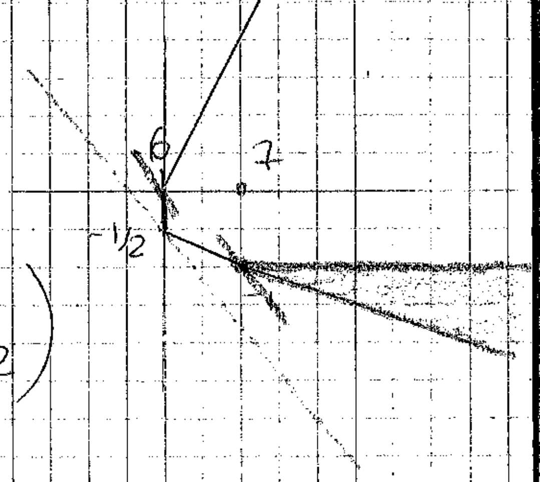
(II) branching rispetto $x_1^0 = 5.8$ < $\lceil 5.8 \rceil = 6$, $\lfloor 5.8 \rfloor = 5$

$$P^1 \begin{cases} P^0 \\ x_1 \le 5 \end{cases}$$

La regione ammissibile di tale problema è vuota

$\Rightarrow$ può essere CHIUSO

$P^2 \begin{cases} P^0 \\ x_1 \geq 6 \end{cases}$



ottimo su $\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow x_r^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$c^T x_r^2 = 56$ < upper bound

$\Rightarrow$ il problema non può essere chiuso

(III) Si esegue allora il branching rispetto a $x_2 = -0.5$

$\lceil 0.5 \rceil = 0 \quad , \quad \lfloor 0.5 \rfloor = -1$

e si generano $P^{21} \begin{cases} P^2 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ che ha ottimo su $(6 \ 0)^T = x^{21}$ intera

$c^T x^{21} = 60$ NUOVO OTTIMO CORRENTE $\Rightarrow$ chiudo

e $P^{22} = \begin{cases} P_2 \\ x_2 \leq -1 \end{cases}$ che ha ottimo su $(7 \ -1)^T$ intera x^{22}

$c^T x^{22} = 62$ peggiore dell'ottimo corrente $\Rightarrow$ chiudo

dunque, essendo stati chiusi tutti i problemi, si ha:

$x^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad c^T x^* = 60$