1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (9 cfu)

23 febbraio 2010

Testo con Soluzione

Esercizio 1. (**4.5 punti**) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{4}x_1^4 + 2x_2^3 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 - 24x_2$$

(i) (**1.5 punto**) Dire se la funzione è convessa giustificando la risposta.

(ii) (**2 punti**) Determinare i due punti che soddisfano le condizioni necessarie del primo ordine e dire, se possibile, di che punti si tratta (minimi/massimi/sella).

(iii) (**1 punto**) Scrivere l'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto $(1,\ 0)^T$.

Soluzione Esercizio 1 Si calcolano

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1^3 + 2x_1x_2^2 + 2x_1 \\ 6x_2^2 + 2x_1^2x_2 - 24 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 12x_2 + 2x_1^2 \end{pmatrix}$$

Si tratta di verificare se la matrice $\nabla^2 f(x) \succeq 0$ per ogni valore di $x \in \mathbb{R}^2$. La matrice non è semidefinita positiva, infatti scegliendo $x_1 = 0$ e $x_2 < 0$ risulta indefinita. Le condizioni necessarie del primo ordine richiedono $\nabla f(x) = 0$ cioé:

$$\begin{gathered} x_1(x_1^2 + 2x_2^2 + 2) = 0 \\ 6x_2^2 + 2x_1^2x_2 - 24 = 0 \end{gathered}$$

I due punti soluzione sono $x_1 = 0$ e $x_2 = \pm 2$. Il punto $\bar{x} = (0,\ 2)^T$ soddisfa le condizioni suff. del secondo ordine

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \succ 0$$

si tratta dunque di un minimo locale stretto. Nel punto $\hat{x} = (0,\ -2)^T$ risulta

$$\nabla^2 f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$$

che non è né semidefinita positiva né semidifinita negativa, dunque si tratta di un punto di sella.

L'approssimazione quadratica della funzione è

$$q(x) = \frac{5}{4} + \begin{pmatrix} 3 \\ -24 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{5}{4} + 3(x_1 - 1) - 24x_2 + \frac{5}{2}(x_1 - 1)^2 + x_2^2$$

Esercizio 2. (**5 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare (n.b. la funzione obiettivo è la stessa dell'Esercizio 1; il problema è in due variabili, dunque consiglio di disegnare la regione ammissibile per verificare la correttezza di alcune risposte)

$$
\begin{aligned}
\min\quad & \tfrac{1}{4}x_1^4 + 2x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_1^2 - 24x_2 \\
& 3x_1 - 2x_2 \le 2 \\
& -x_1 + x_2 \le 1 \\
& x_2 \le 3 \\
& x_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

(i) (**0,5 punti**) Dire se uno dei punti determinato all'Esercizio 1(ii) può(non può) essere minimo giustificando la risposta.

(ii) (**0.5 punti**) Dire se l'esistenza di un punto di minimo è garantita (giustificando la risposta).

(iii) (**2,5 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $(2,\ 3)^T$. Indicare il valore del passo $\alpha_{\max}$ per cui si rimane ammissibili.

(iv) (**1,5 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT e dire se nel punto $(2,\ 3)^T$ sono/non sono verificate, giustificando la risposta.

Soluzione Esercizio 2. I punti $\bar{x}, \hat{x}$ non risultano ammissibili e dunque NON possono essere punti di minimo.

Il problema ammette sicuramente soluzione in base al teorema di Weierstrass perché si tratta della minimizzazione di una funzione continua su un insiee chiuso e limitato (poliedro ammissbile).

Nel punto $(2,\ 3)^T$ risulta $\nabla f = (48,\ 54)^T$ e sono attivi i vincoli $\{2, 3\}$, dunque il sistema che definisce le direzioni ammissibili e di discesa é

$$
\begin{aligned}
& 6(8d_1 + 9d_2) < 0 \\
& -d_1 + d_2 \le 0 \\
& d_2 \le 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Una possibile direzione che risolve il sistema é $d = (1,\ -1)^T$. Si tratta ora di determinare il passo $\alpha_{\max} > 0$ tale che

$$
\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\alpha \\ 3-\alpha \end{pmatrix} \text{ammissibile} \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_{\max}]
$$

Considerando i vincoli NON attivi, risulta

$$
\begin{aligned}
& 3x_1 - 2x_2 = 3(2+\alpha) - 2(3-\alpha) \le 2 \\
& x_1 = 2 + \alpha \ge 0
\end{aligned}
$$

da cui si ottiene $\alpha_{\max} = \frac{2}{5}$.

Le condizioni di KKT richiedono l'esistenza di moltiplicatori $\lambda_i \ge 0$, con $i = 1, 2, 3, 4$ tali che:

$$
\begin{pmatrix} x_1^3 + 2x_1x_2^2 + 2x_1 \\ 6x_2^2 + 2x_1^2x_2 - 24 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0
$$

e tali che

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(3x_1 - 2x_2 - 2) = 0\\
&\lambda_2(-x_1 + x_2 - 1) = 0\\
&\lambda_3(x_2 - 3) = 0\\
&\lambda_4 x_1 = 0
\end{aligned}$$

Nel punto dato, le KKT non possono essere soddisfatte per il teorema dell'alternativa perché esiste una soluzione al sistema (1). In effetti risulta dalla complementaritá $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$ da cui si ha

$$\begin{pmatrix}48\\54\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$$

da cui si ottiene $\lambda_2 = 48$ e $\lambda_3 < 0$.

Esercizio 3. (**6,5 punti**)

Sia dato il poliedro (n.b.: è il poliedro dell'Esercizio 2 con l'aggiunta del vincolo $x_2 \geq 0$)

$$\begin{aligned}
&3x_1 - 2x_2 \leq 2\\
&-x_1 + x_2 \leq 1\\
&x_2 \leq 3\\
&x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$).

(ii) (**2,5 punti**) Individuare tutte le Soluzione di Base Ammissibile del poliedro in forma standard.

(iii) (**2,5 punti**) Scegliere due delle SBA ottenute ed indicare le variabili di base e fuori base, il loro valore e le matrici di base corrispondenti.

Soluzione Esercizio 3. (i) Per mettere il problema in forma standard é necessario introdurre 3 variabili di slack

$$\begin{aligned}
&3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2\\
&-x_1 + x_2 + x_4 = 1\\
&x_2 + x_5 = 3\\
&x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5
\end{aligned}$$

Risulta

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

(ii) Le SBA corrispondono ai vertici del poliedro. Inoltre i vertici del poliedro in forma standard sono in corrispondenza con i vertici del poliedro originario. Dunque per individuare le SBA si puó procedere sia considerando i vertici del poliedro nello spazio $\mathbb{R}^2$ e determinando le variabili mancanti, sia applicando la definizione di SBA che implica che $n - m = 2$ variabili debbano essere necessariamente nulle.

(a) $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = 2, x_4 = 1, x_5 = 3$ SBA

(b) $x_1 = x_3 = 0$; (non ammissibile)

(c) $x_1 = x_4 = 0$; $x_2 = 1, x_2 = 4, x_5 = 2$ SBA

(d) $x_1 = x_5 = 0$ (non ammissibile)

(e) $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = \frac{2}{3}, x_4 = \frac{5}{3}, x_5 = 3$ (SBA)

(f) $x_2 = x_4 = 0$, (non ammissibile)

(g) $x_2 = x_5 = 0$; (non ammissibile)

(h) $x_3 = x_4 = 0$, (non ammissibile),

(i) $x_3 = x_5 = 0$; $x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = 3, x_4 = \frac{2}{3}$ SBA.

(j) $x_4 = x_5 = 0$; $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 2$ SBA.

(iii) Consideriamo le due SBA

(a) $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 1, x_5 = 3$. Le variabili di base sono $x_B = (x_3, x_4, x_5)$, la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = \frac{2}{3}, x_5 = 0$. Le variabili di base sono $x_B = (x_1, x_2, x_4)$, la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. (**7 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (P) (n.b.: la regione ammissibile è la stessa dell'Esercizio 2)

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema (disegnare la regine ammissibile, le curve di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di minimo e determinare analiticamente il suo valore).

(ii) (**3 punti**) Scrivere il problema duale e determinare la soluzione ottima utilizzando la teoria della dualità.

(iii) (**2 punti**) Dire se e come cambia la soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da 2 a $2 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "piccolo".

Soluzione Esercizio 4. Risolvendo graficamente il problema (vedi figura in fondo) si ottiene il punto $x^* = \frac{8}{3},\ \ 3)^T$. Il problema duale è

$$\begin{array}{ll} \min & 2u_1 + u_2 + 3u_3 \\ & 3u_1 - u_2 \geq 1 \\ & -2u_1 + u_2 + u_3 = 1 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{array}$$

Utilizzando le condizioni di complementarità duali

$$x_1^*(3u_1^* - u_2^* - 1) = 0$$

si ottiene $3u_1^* - u_2^* - 1 = 0$ e dalle condizioni di compl. primali

$$\begin{aligned} u_1^*(3x_1^* - 2x_2^* - 2) &= 0 \\ u_2^*(-x_1^* + x_2^* - 1) &= 0 \\ u_3^*(x_2^* - 3) &= 0 \end{aligned}$$

si ottiene $u_2^* = 0$ ($I(x^*) = \{1, 2\}$). Dunque si ha

$$\begin{aligned} u_2^* &= 0 \\ 3u_1^* - u_2^* - 1 &= 0 \\ -2u_1^* + u_2^* + u_3^* &= 1 \end{aligned}$$

da cui $u^* = (\frac{1}{3} \;\; 0, \;\; \frac{5}{3})^T$. Se nel primo vincolo primale il r.h.s. cambia da 2 a $2+\varepsilon$ con ε suff. piccolo, risulta

$$c^T x^*(\varepsilon) = (b_1 + \varepsilon)u_1^* + b_2 u_2^* + b_3 u_3^* = b^T u^* + \varepsilon u_1^*$$

Esercizio 5 (4 punti)

Utilizzando il metodo del Branch and Bound determinare una soluzione del seguente problema di programmazione lineare intera (n.b. si tratta del problema di PL dell'Esercizio 3 a cui è stato aggiunto il vincolo di interezza):

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x \text{ intero} \end{array}$$

Soluzione Esercizio 5. Si risolve il rilassamento lineare ottenendo il valore $x^{0*} = (\frac{8}{3}, \;\; 3)^T$ di valore $\mathrm{UB}^0 = \frac{17}{3}$. Una soluzione intera è $(0, 0)^T$ e il valore dell'ottimo corrente $z_I^0 = 0$. Si separa rispetto alla varibile x_1 ottenendo i due sottoproblemi

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x \text{ intero} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_1 \geq 3 \\ & x \text{ intero} \end{array}$$

Risolvendo il rilassamento del primo si ottiene la soluzione intera $(2,3)^T$, si aggiorna l'ottimo corrente $z_I = 5$ e il problema si chiude. Il secondo problema ha insieme ammissbile vuoto. Si chiude. L'ottimo intero è $(2,3)^T$.

Esercizio 6 (4 punti)

Si abbia un progetto il cui completamento richiede l'esecuzione delle seguenti attività:

attività	A	B	C	D	E	F	G	H
durata	10	8	6	15	10	2	4	6

Sulla base delle precedenze:

A<B,D

B<C,E

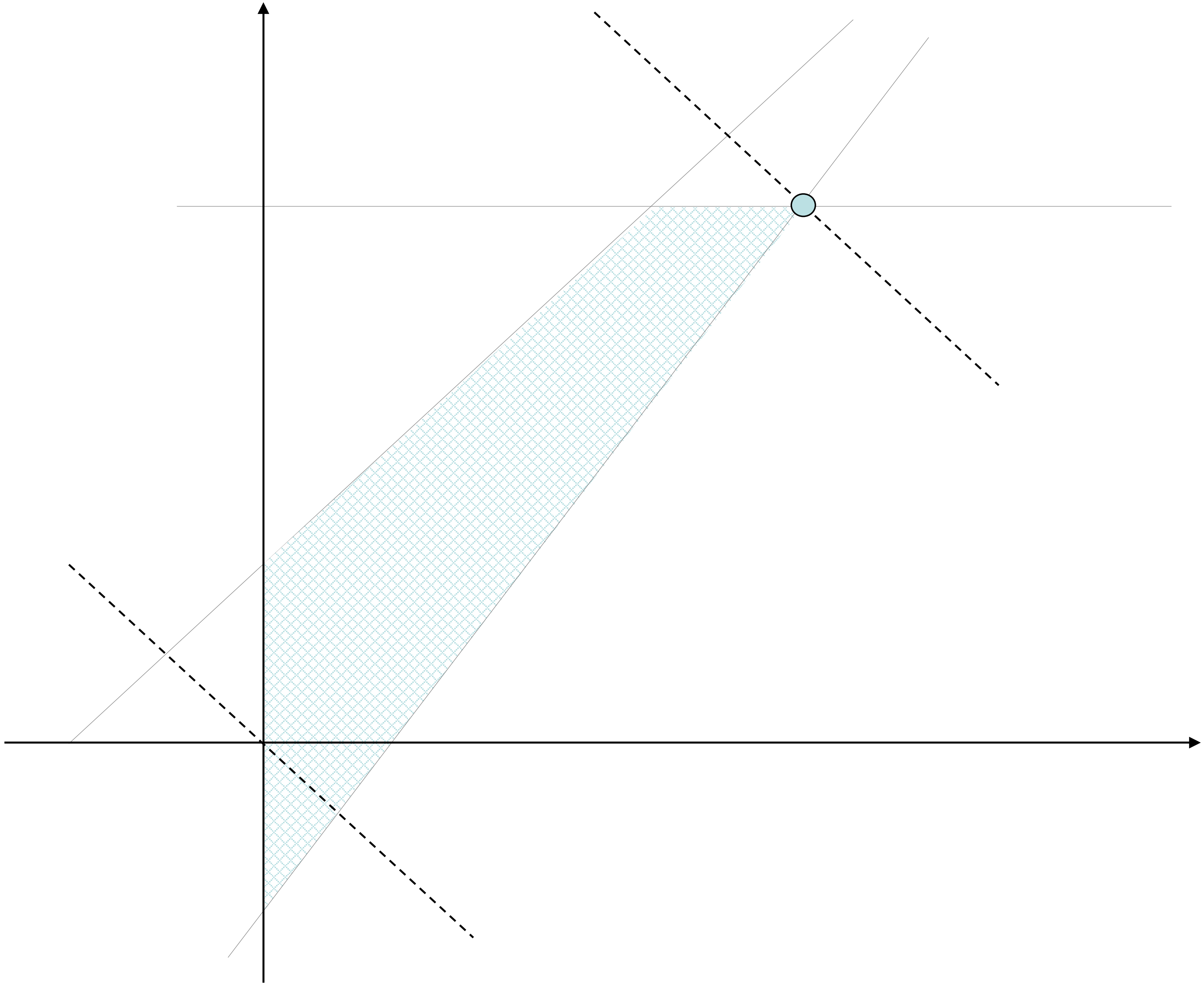
C<E,F

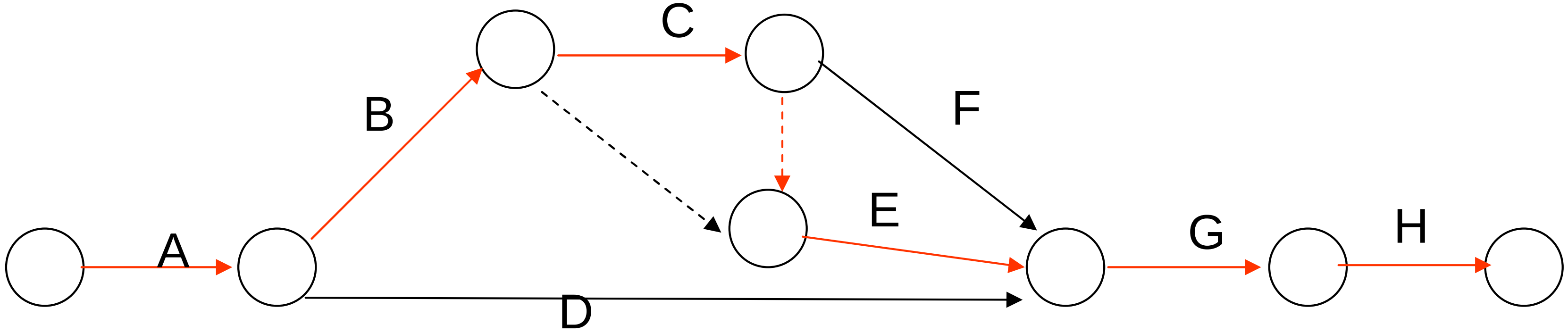
E,D,F<G

G<I

Si costruisca il diagramma reticolare del progetto e si determini il percorso critico.

Soluzione Esercizio 6. vedi figura




A
B
C
D
E
F
G
H