DIPARTIMENTO DI
INFORMATICA E SISTEMISTICA 30/3/2015

ESERCIZIO 1

i) $\nabla f = \begin{pmatrix} x_2^2 + 2x_1x_2 + 2 \\ 2x_1x_2 + x_1^2 + 6x_2x_3 \\ 3x_3^2 + 3x_2^2 \end{pmatrix}$ $\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_2+2x_1 & 0 \\ 2x_2+2x_1 & 2x_1+6x_3 & 6x_2 \\ 0 & 6x_2 & 6x_3 \end{pmatrix}$

Studio $\nabla^2 f(x)$; sulla diagonale $\exists$ elementi che possono assumere segno >0 e <0 $\Rightarrow$ dunque $\nabla^2 f$ indefinito
f non è né concava né convessa. Se p.s. non è né concavo né convesso

ii) $\nabla f = 0$ $\begin{cases} \text{---} & \Rightarrow 0+2=0 \text{ MAI} \\ \text{---} & \Rightarrow x_1 = 0 \\ 3x_3^2 + 3x_2^2 = 0 & \Rightarrow x_2 = x_3 = 0 \end{cases}$

non $\exists$ punti stazionari e dunque $\nexists$ minimi $f(x)$

iii) KKT

$$\begin{pmatrix} x_2^2 + 2x_1x_2 + 2 \\ 2x_1x_2 + x_1^2 + 6x_2x_3 \\ 3x_2^2 + 3x_3^2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -10 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1,3,4,5$

$\lambda_1 (1 - 8x_1 - 2x_2 + 6x_3) = 0$

$\lambda_3 x_1 = 0 \quad \lambda_4 x_2 = 0 \quad \lambda_5 x_3 = 0$

+ AMMISSIB.

IV) $\bar{x}_3 = 0 \quad g_1(\bar{x}) = 0$ 1

$\hookrightarrow$ AHM. $\begin{cases} +8\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = +1 \\ -10\bar{x}_1 + 24\bar{x}_2 = 1 \end{cases} \quad 106 x_1 = 11 \quad \begin{pmatrix} 11/106 \\ 9/106 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = \lambda_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{9}{106}\right)^2 + 2\frac{99}{(106)^2} + 2 \\ \frac{2 \cdot 99}{(106)^2} + \frac{81}{(106)^2} \\ 3\,\frac{81}{(106)^2} \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -10 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

$\nabla f(\bar{x})$

$$\begin{cases} \frac{81 + 198}{(106)^2} + 2 + 8\lambda_1 - 10\mu_2 = 0 \\ \frac{279}{(106)^2} + 2\lambda_1 + 24\mu_2 = 0 \\ \frac{243}{(106)^2} - 6\lambda_1 + 3\mu_2 - \lambda_5 = 0 \end{cases}$$

$1^a - 4(2^a) = 0 \Rightarrow \cancel{4} - 3 \cdot \frac{279}{(106)^2} + 2 - 106\mu_2 = 0$

$\mu_2 = -\frac{3 \cdot 279}{(106)^3} + \frac{2}{106} < 0$

$$\lambda_1 = -12\,\mu_2 - \frac{279}{(106)^2} =$$

$$= 36 \cdot \frac{279}{(106)^3} - \frac{24}{106} - \frac{279}{(106)^2} =$$

$$= \frac{279}{(106)^2} \underbrace{\Big[\underbrace{\frac{36}{106}}_{<1} - 1 \Big]}_{<0} - \frac{12}{53} < 0 \qquad \text{NON } \exists \text{ KKT}$$

v)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/12 \\ 3 \end{pmatrix} = \hat{x} \qquad I(\hat{x}) = \{2\}$$

$$-8 - \frac{2}{12} + 18 = 10 - \frac{1}{6} > -1$$

$$-10 + 2 + 9 = 1 \quad \text{ok}$$

$$\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{144} + \frac{1}{6} + 2 \\ \frac{1}{6} + 1 + 18 \\ 3 + 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{144} \\ 19 + \frac{1}{6} \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \nabla f(\hat{x})^T d < 0 \\ a_2^T d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{27}{144} d_1 + \frac{19 \cdot 6 + 1}{6} d_2 + 30 d_3 < 0 \\ -10 d_1 + 24 d_2 + 3 d_3 = 0 \end{cases}$$

$$d_3 = \frac{10 d_1 - 24 d_2}{3} \qquad d_1 = 0 \quad d_2 = 1 \quad d_3 = -8$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} = \bar{d}$$

vi) NO perché $\exists\ \bar{d}$ al punto v

1

ESERCIZIO 2

i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ verifico ammissibilità

$-1=-1$ ok NON AMMISS.

$12=1$ NO

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/12 \\ 3 \end{pmatrix}$ $-8-\frac{1}{6}+18>-1$ ok

$-10+2+9=1$ ok

$x_i \geq 0$

AMM.

$rg(A_{I(\bar{x})})=1<3$

NON VERTICE

$\begin{pmatrix} \frac{11}{106} \\ \frac{9}{106} \\ 0 \end{pmatrix} = v^{(1)}$ AMMISS.

(verificato pto IV ES 1)

$I(\bar{x})=\{1,2,3\}$ $rg(A_{I(\bar{x})})=3$ $\boxed{\text{VERTICE}}$

$\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ $\ngeq 0$ NON AMMISS.

ii) il punto è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $d: -10d_1+24d_2+3d_3=0$

$$\bar{d}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \frac{10d_1-24d_2}{3} \end{pmatrix} \qquad y=\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \frac{10d_1-24d_2}{3} \end{pmatrix}$$

Posso scegliere d_1 e d_2 in modo tale che almeno una delle seguenti condizioni sia soddisfatta –

$a_1^T \bar{d} < 0 \qquad -8d_1 - 2d_2 + \cancel{6}^{2}\,\dfrac{10d_1 - 24d_2}{\cancel{3}} < 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \to 12d_1 - 50d_2 < 0$

$a_3^T \bar{d} < 0 \qquad d_1 < 0$

$a_4^T \bar{d} < 0 \qquad d_2 < 0$

$a_5^T \bar{d} < 0 \qquad 10d_1 - 24d_2 < 0$

Scegliendo ad es. $d_2 = 0$ $d_1 < 0$ potrebbero potenzialmente attivarsi i vincoli 1), 3), 5) -

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3\alpha \\ 1/2 \\ 3-10\alpha \end{pmatrix}$$

Da cui
$$\begin{cases} -8(1-3\alpha) - 1 + 6(3-10\alpha) \geq -1 \\ 1-3\alpha \geq 0 \\ 3-10\alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8 + 24\alpha \cancel{-1} + 18 - 60\alpha \geq \cancel{-1} \qquad -3\alpha \geq -10 \qquad \alpha \leq \dfrac{10}{3} \\ \alpha \leq 1/3 \\ \alpha \leq \dfrac{3}{10} \end{cases} \qquad \alpha^{max} = \frac{3}{10} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 - 9/10 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 27/144 \\ 19+1/6 \\ 30 \end{pmatrix}$$ valori punto i) ES 1 $\Rightarrow \nabla f(\hat{x})^T d < 0$

− DIREZIONE di d DISCESA

iii) $\min \; 5x_1 + 41x_2 + 2x_3$

$$8x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 1$$
$$-10x_1 + 24x_2 + 3x_3 \qquad = 1$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4$$

) $v^1 = \begin{pmatrix} \frac{11}{106} \\ \frac{9}{106} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow SBA = \begin{pmatrix} 11/106 \\ 9/106 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}}$

NB. il primale deve essere messo in forma canonica per la costruzione "automatica" del duale

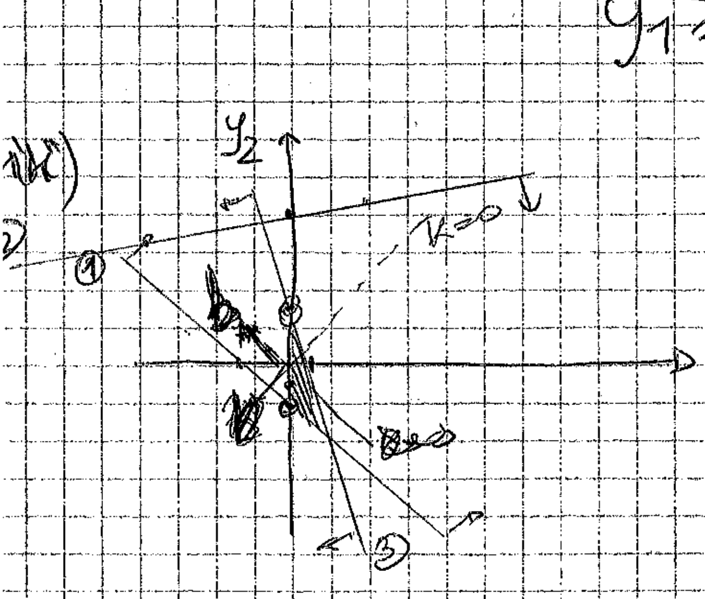
$$\min \; 5x_1 + 41x_2 + 2x_3$$
$$-8x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq -1 \qquad (P)$$
$$-10x_1 + 24x_2 + 3x_3 = 1$$
$$x_i \geq 0$$

DUALE

$$\max \; -y_1 + y_2$$
$$-8y_1 - 10y_2 \leq 5$$
$$-2y_1 + 24y_2 \leq 41$$
$$6y_1 + 3y_2 \leq 2$$
$$y_1 \geq 0$$

~~vedi soluz. foglio successivo~~

III)



$y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ +\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $I(y^*) = \{3\}$

$b^T y^* = +\frac{2}{3}$

iii) no! si tratta di soluz. con componente frazionaria se $y \in \mathbb{Z}^2$. $\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{Z}^2$

IV) complementarità primale e duale + AMM. PRIMALE

$y_1^* (1 - 8x_1 - 2x_2 + 6x_3) = 0$

$x_1^* (-8y_1^* - 10y_2^* - 5) = 0$

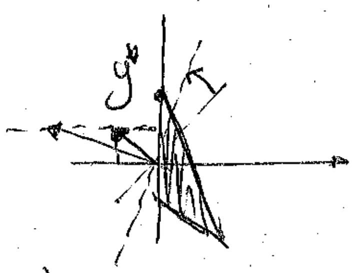
$x_2^* (-2y_1^* + 24y_2^* - 4) = 0$ $\Rightarrow x_1^* = x_2^* = 0$

$x_3^* (6y_1^* + 3y_2^* - 2) = 0$

$x_3^* = \frac{1}{3}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = x^*$ AMMISSIBILE $c^T x^* = \frac{2}{3}$ OK

V) perché $y_1^* = 0$ cambiamenti di b_1 "piccoli" non producono cambiamenti

VI) $1 \to 1 + \varepsilon$ $\quad -1 \to -1 - \varepsilon$ $\quad b_1 = -1 - \varepsilon$ $\quad b = \begin{pmatrix} -1-\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$ $\varepsilon > 0$



per $\varepsilon \to \infty$ la retta $\to \parallel$ asse y_2
ma y^* rimane ottimo

VII) $c_1 = 5 \to 5 + \varepsilon$ corrisponde ad una variazione nel vincolo del duale

per valori di ε piccoli $\to x^*$ non cambia $\Rightarrow c_\varepsilon^T x_\varepsilon^* = c_\varepsilon^T x^* = c^T x^* + \varepsilon x_1^*$
$= 5^T y^* + \varepsilon x_1^*$

ma $x_1^* = 0$ dunque non cambia

ESERCIZIO 4 VARIABILI x_j = n° di CONFEZ. tipo j acquistate - c_i = costi acquisto conf. i ; a_{ij} = q.tà ELEMENTO i CONF j

$\min \sum_{i=1}^{3} c_i x_i$ VINCOLI $\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \geq \%_{RIC.} \sum_{i=1}^{3} x_i$; $\sum x_i \geq 10^5$; $x_i \geq 0$, $x_i \in \mathbb{Z}$