1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu)

10 novembre 2015

Cognome	**Nome**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un **massimo di tre mesi** dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**7 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_2-2)^2 + x_1^2 + \frac{1}{6}x_3^3 - x_3^2 + 2x_2 + x_1^2 x_2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (**1 punti**) Dire se il problema è (strettamente) convesso/concavo.

(ii) (**1,5 punti**) Determinare se esistono i punti stazionari NON vincolato e studiarne la natura.

(iii) (**2 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (1,\ 1,\ 1)^T$.

(iv) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT, e determinare, se esiste un punto che soddisfa le condizioni con $x_1 > 0$ e $x_2 = 0$ e il 2^o vincolo attivo, calcolando i moltiplicatori.

(v) (**0,5 punti**) Dire se le condizioni di KKT possono essere soddisfatte nel punto $\hat{x} = (1,\ 1,\ 1)^T$.

Esercizio 2. (**6 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 - 6x_3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**2 punti**) Dire se i seguenti punti sono/non sono vertici motivando la risposta:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(ii) (**2 punto**) Individuato al punto (i) un vettore $\hat{x}$ NON vertice, determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x}$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$. Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa.

(iii) (**0,5 punto**) Scrivere il poliedro nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iv) (**1,5 punti**) Scegliere i vertici individuati al punto (i) e scrivere i corrispondenti vertici (SBA) del poliedro in forma standard definito al punto (iii). Scegliere uno dei vertici (SBA) ed indicare le variabili di base e fuori base e il loro valore.

Esercizio 3. (**12 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 - 6x_3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(iii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema primale.

(iv) (**2 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del pirmo vincolo cambia da 2 a $2 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

(v) (**3 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il coefficiente della variabile x_3 nella funzione obiettivo cambia da -6 a $-6 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo". Individuare utilizzando la soluzione grafica del duale l'intervallo di valori di $\varepsilon > 0$ per cui la variazione del valore della funzione obiettivo segue la legge definita sopra.

(vi) (**0,5 punti**) Dire se la soluzione ottima individuata al punto (iii) è ancora ottima se al problema primale viene aggiunto il vincolo di interezza sulla variabile $x_2 \in Z$.

Esercizio 4. (**6 punti**)

Una azienda alimentare a conduzione familiare produce due tipi di formaggio: un formaggio cremoso e una caciotta. Per la produzione di questi due formaggi sono utilizzati latte intero e latte parzialmente scremato in diverse proporzioni. Il latte intero e il latte parzialmente scremato contengono grasso. In tabella sono riportati la percentuale di grasso e il costo di acquisto (euro/etto)

	intero	scremato
grasso in %	60	30
costo	0.8	0.4

I due formaggi devono avere caratteristiche specifiche riguardo il contenuto medio percentuale di grasso: il formaggio cremoso deve avere contenuto in grasso almeno pari al 50%, mentre la caciotta deve avere contenuto minimo di grassi almeno pari al 35%. Inoltre almeno il 40% degli ingredienti (in peso) del formaggio cremoso deve essere latte intero e almeno il 20% degli ingredienti (in peso) della caciotta deve latte intero.

Entrambi i formaggi sono prodotti utilizzando un apposito macchinario che può processare 3000 etti di latte al giorno. Il processo di produzione della caciotta prevede una possibile perdita di peso. In particolare da un etto di latte (parz. scremato o intero) si ottiene un etto di formaggio cremoso; mentre da un etto di di latte (parz.scremato o intero) si ottengono 0.9 etti di caciotta e 0.1 etti di scarto. Ogni giorno devono essere prodotti almeno 1000 etti di formaggio cremoso e almeno 1000 etti di caciotta. Inoltre è noto che al massimo saranno venduti 1500 etti di formaggio cremoso e 2000 etti di caciotta.

Nella tabella seguente sono riportati i costi di produzione (euro/etto) e i prezzi di vendita (euro/etto) dei due formaggi

	costo produz.	prezzo vendita
formaggio cremoso	0.4	2.10
caciotta	0.4	2.50

Formulare un modello di PL per la pianificazione della produzione dei formaggi che massimizzi il profitto dell'azienda.