1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu - BATR 9 cfu)

21 dicembre 2015

Cognome	Nome

VOTO

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (7 punti)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1-2)^2 + x_2^2 + e^{x_1} \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq -4 \\ & -7x_1 + 10x_2 \geq -35 \end{aligned}$$

(i) (**1,5 punti**) Dire se le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti.

(ii) (**2 punti**) Determinare, se esiste, una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\widehat{x} = (-\frac{8}{3}, \ -\frac{2}{3})^T$.

(iii) (**1,5 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT nel punto $\widehat{x} = (-\frac{8}{3}, \ -\frac{2}{3})^T$ e dire se pososno essere soddisfatte nel punto.

(iv) (**2 punti**) Determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\tilde{x} = (2, \ 4)^T$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$. Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa.

Esercizio 2. (**4 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 4x_2 + 35x_3 \\ & -x_1 + x_2 - 7x_3 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**3 punti**) Individuare tutte le SBA del problema

(ii) (**1 punti**) Scegliere una delle SBA individuate al punto (i) e indicare le matrici di base e fuori base.

Esercizio 3. (**9 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 4x_2 \\ & \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq -4 \\ & -7x_1 + 10x_2 \geq -35 \end{array}$$

(i) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore.

(ii) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(iii) (**2,5 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema duale.

(iv) (**1,5 punti**) Dire se, ed eventualmente come, cambia il valore della funzione obiettivo nella soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da -4 a $-4 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e "sufficientemente piccolo".

(v) (**1,5 punti**) Scrivere il problema nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$). (NOTA BENE: attenzione alle variabili non vincolate in segno)

Esercizio 4. (**4 punti**) Sia dato il problema di Programmazione multiobiettivo lineare

$$\begin{array}{ll} \min & \{x_1 + 4x_2, x_1 + x_2\} \\ & \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq -4 \\ & -7x_1 + 10x_2 \geq -35 \end{array}$$

(NOTA BENE: Si tratta del problema dell'Esercizio 3 con l'aggiunta del secondo obiettivo $x_1 + x_2$)

(i) (**1 punti**) Individuare i due punto ottimi riferiti ai due obiettivi (x^{*1}, x^{*2}) e i corrispondenti valori di riferimento ottimi dei due obiettivi (z^{*1}, z^{*2})

(ii) (**1 punti**) Verificare, utilizzando la definizione, che il punto $\hat{x} = (2,\ 0)^T$ non è un ottimo di Pareto

(iii) (**2 punti**) Verificare che il punto $\hat{x} = (0,\ -2)^T$ soddisfa le condizioni di KKT per il problema multiobiettivo

Esercizio 5. (**3 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare intera

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 4x_2 \\ & \\ & -x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1 + 2x_2 \ge -4 \\ & -7x_1 + 10x_2 \ge -35 \\ & x_1 \text{ intero} \end{array}$$

Sia x^0 la soluzione ottima del problema rilassato (ovvero ottenuta rimuovendo il vincolo di interezza) e sia assegnato come soluzione ammissibile iniziale il punto $x_I = (0,\ 2)^T$

(NOTA BENE: Si tratta del problema dell'Esercizio 3 con l'aggiunta del vincolo "x_1 intero")

(i) (**1 punti**) Indicare i valori di lower e upper bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound; dire se è possibile chiudere il problema specificando le motivazioni

(i) (**2 punti**) Si scrivano i due sottoproblemi $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2$ generati dal metodo di Branch and Bound separando rispetto alla variabile frazionaria x_1.

Esercizio 6. (**4 punti**)

Un'azienda di torrefazione di caffè miscela $N = 4$ tipi di chicchi di caffè per ottenere $M = 3$ miscele diverse che hanno destinazioni di mercato diverse, una per hotel di lusso M_1, una per ristoranti M_2, una per supermercati M_3.
L'azienda dispone di N fornitori internazionali di caffè, uno per ogni tipologia di caffè. Ogni miscela $j = 1, \dots, M$ è caratterizzata da una composizione fissata espressa in percentuale a_{ij} di componenti $i-$esimo presente nella miscela (risulta cioè $\sum_{i=1}^{N} a_{ij} = 100$). Ogni tipologia di caffè ha un costo c_i (euro/etto) $i = 1, \dots, N$. Inoltre è possibile acquistare ogni settimana un quantitativo max di caffè $q_i^{\max}$.

La composizione percentuale delle miscele a_{ij}, $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, \dots, 3$, il costo dei caffè c_i, $i = 1, \dots 4$, la disponibilità massima $q_i^{\max}$, $i = 1, \dots, 4$ è riportato in tabella

tipo	Miscela			costo	$q_i^{\max}$
chicco	M_1	M_2	M_3	(euro/etto)	etti
1	20%	35%	10%	0,6	40000
2	40%	15%	35%	0,8	25000
3	15%	20%	40%	0,5	20000
4	25%	30%	15%	0,7	45000

Le miscele prodotte possono essere vendute al prezzo p_j (euro/etto) $j = 1, \ldots, M$ ed è prevista una richiesta minima $R_j^{\min}$ per ogni tipo di miscela M_j.

Il prezzo di vendita e il quantitativo minimo richiesto delle miscele è riportato in tabella.

	Miscela		
	M_1	M_2	M_3
p_j	1,25	1,50	1,4
$R_j^{\min}$	10000	25000	30000

L'impianto di produzione ha una capacità produttiva settimanale di $Q^{\max} = 100000$ ton alla settimana, che vuole essere utilizzata al massimo. Formulare il modello di PL che consenta di determinare il livello ottimo di produzione.