1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu - BATR 9 cfu)

25 gennaio 2016

Cognome **Nome**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**7 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^4 + (x_2-1)^2 + x_3^3 \\ & \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \\ & -x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1 \\ & x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punti**) Dire se le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti.

(ii) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT nel punto $\widehat{x} = (\frac{7}{5},\ \frac{3}{5},\ 0)^T$ e dire se sono soddisfatte nel punto $\widehat{x}$ calcolando i moltiplicatori.

(iii) (**1,5 punti**) Scrivere il sistema per individuare una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\widehat{x} = (\frac{7}{5},\ \frac{3}{5},\ 0)^T$ e dire se esiste una soluzione.

(iv) (**2 punti**) Determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\tilde{x} = (2,\ 0,\ 0)^T$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$. Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa.

Esercizio 2. (**4 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 6x_2 + 8x_3 \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ & -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**4 punti**) Individuare tutte le SBA del problema e indicare le matrici di base e fuori base.

Esercizio 3. (**8 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ & \\ & x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 + 4x_2 \geq -6 \\ & 2x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo; dire se il problema primale ammette soluzione e in caso determinarla.

(ii) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(iii) (**2 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, dire se il problema duale ammette soluzione e in caso determinarla.

(iv) (**1 punti**) Dire se cambia la soluzione del problema nel caso la funzione obiettivo del problema primale sia $-(2x_1 + x_2)$.

(v) (**1,5 punti**) Scrivere il problema primale nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$). (NOTA BENE: attenzione alle variabili non vincolate in segno)

Esercizio 4. (**4 punti**) Sia dato il problema di Programmazione multiobiettivo lineare

$$\begin{array}{ll} \min & \{3x_1 - 2x_2, 2x_1 + x_2\} \\ & \\ & x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 + 4x_2 \geq -6 \\ & 2x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

(NOTA BENE: Si tratta della regione ammissibile del problema dell'Esercizio 3 con aggiunta vincolo $x_1 \leq 3$)

(i) (**1 punti**) Individuare i due punti di ottimo riferiti ai due obiettivi (x^{*1}, x^{*2}) e i corrispondenti valori di riferimento ottimi dei due obiettivi (z^{*1}, z^{*2})

(ii) (**1 punti**) Verificare, utilizzando la definizione, che il punto $\hat{x} = (2,\ 0)^T$ non è un ottimo di Pareto

(iii) (**2 punti**) Scrivere le condizioni di KKT per il problema multiobiettivo e verificare se il punto $\hat{x} = (0,\ -1)^T$ le soddisfa.

Esercizio 5. (**4 punti**)

Sia dato il problema di knapsack intero

$$\begin{array}{ll} \max & 8x_1 + 15x_2 + x_3 + 9x_4 \\ & \\ & 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 9 \\ & x_i \in \{0,1\}\ i = 1,\dots,4 \end{array}$$

(i) (**1 punti**) Indicare i valori di lower e upper bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound; dire se è possibile chiudere il problema specificando le motivazioni.

(i) (**3 punti**) Si utilizzi il metodo del Branch-and-bound per la soluzione esaminando almeno 4 problemi (Suggerimento: esplorare l'albero di branching in profondit fissando per primo la variabile al valore zero)

Esercizio 6. (**4 punti**)

Un'acciaieria acquista rottami di metallo per ottenere due leghe con caratteristiche chimiche differenti. In particolare sono disponibili in quantità limitate $M = 4$ diversi tipi di rottami $\{R_1, \dots, R_4\}$ e si vogliono fondere tali rottami per ottenere due leghe L_k $k = 1, \dots, N = 2$ in un quantitativo prefissato P_k. Di ciascun rottame R_i è nota la composizione chimica, ovvero le quantità $\{Ch_{i1}, \dots, Ch_{in}\}$ di $n = 3$ metalli (piombo, zinco, stagno) presenti nel rottame, la disponibilità (in ton) d_i e il costo di acquisto c_i (Keuro/ton)

	piombo	zinco	stagno	disponibilità d_i	costo c_i
R_1	55	30	15	1,5	2,5
R_2	20	30	60	2	1,8
R_3	10	65	25	1	2
R_4	38	32	30	1,8	2,2

Composizione chimica dei rottami (% peso), disponibilità e costo (Keuro/ton)

Ciascuna lega L_k deve avere una composizione percentuale minima q_i degli $n = 3$ elementi chimici (metalli) $\{Ch_1, \dots, Ch_n\}$ e viene venduta al prezzo p_k (Keuro/ton) secondo quanto riportato in tabella

	piombo	zinco	stagno	prezzo
L_1	30	60	42	2,6
L_2	46	38	56	2,8

Composizione chimica minima richiesta per le leghe (% peso) e prezzo (Keuro/ton)

Si deve soddisfare esattamente un ordine di 1500 tonnellate di lega L_1 e 2000 tonnellate di lega L_2.

Si tratta di definire un modello di programmazione lineare per determinare la composizione delle due leghe in modo da massimizzare il profitto complessivo.