

1^a PROVA scritta di
RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu - BATR 9 cfu)
21 settembre 2016

Cognome

Nome

VOTO

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stata sostenuta.

Esercizio 1. (7 punti)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 5x_2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 12x_1 - 2x_2 \leq 33 \\ & 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) **(1,5 punti)** Determinare se esistono punti stazionari della funzione obiettivo (possibili minimi NON vincolati) e studiarne, se possibile, la natura.
- (ii) **(2 punti)** Scrivere le Condizioni di KKT nel punto $\hat{x} = (0, 1)^T$ e dire se sono soddisfatte nel punto \hat{x} calcolando i moltiplicatori.
- (iii) **(1,5 punti)** Scrivere il sistema per individuare una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (0, 1)^T$ e dire se esiste una soluzione.
- (iv) **(2 punti)** Determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\tilde{x} = (3, \frac{3}{2})^T$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in \hat{x} . Individuare il valore dello spostamento massimo t^{\max} . Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa.

Esercizio 2. (4 punti)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 33x_2 + 7x_3 \\ & -x_1 + 12x_2 \geq 1 \\ & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (2,5 punti) Dire se i seguenti punti sono vertici del problema

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{12} \\ \frac{13}{12} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(ii) (0,5 punti) Scrivere il problema nella forma standard per l'utilizzo del metodo del semplice ($Ax = b$, $x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iii) (1 punto) Scegliere un vertice individuato al punto (i) e scrivere la corrispondente BA del poliedro in forma standard definito al punto (ii) indicando la matrice di base.

Esercizio 3. (6 punti)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 12x_1 - 2x_2 \leq 33 \\ & 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (2,5 punti) Risolvere graficamente il problema: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo; dire se il problema ammette soluzione e in caso determinarla.

(ii) (1,5 punto) Scrivere il problema duale.

(iii) (2 punti) Utilizzando la teoria della dualità, dire se il problema duale ammette soluzione e in caso determinarla.

Esercizio 4. (5 punti) Sia dato il problema di Programmazione multiobiettivo lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & \{-x_1 + x_2, x_1 + 2x_2\} \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 12x_1 - 2x_2 \leq 33 \\ & 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (1 punto) Individuare i due punti di ottimo riferiti ai due obiettivi (x^{*1}, x^{*2}) e i corrispondenti valori di riferimento ottimi dei due obiettivi (z^{*1}, z^{*2})

- (ii) (2 punti) Disegnare la regione nello spazio degli obiettivi e individuare la frontiera di ottimi di Pareto
- (iii) (2 punti) Scrivere le condizioni di KKT per il problema multiobiettivo e verificare se il punto $\hat{x} = (\frac{7}{2}, 3)^T$ le soddisfa.

Esercizio 5. (5 punti)

Risolvere il seguente problema di knapsack binario

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 5x_4 \\ & 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 7 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

Esercizio 6. (4 punti)

Una azienda produce due tipi di vino spumante: *Secco* e *Dolcetto*, che ottiene mescolando tre composti base (B1, B2, B3). I composti basi sono caratterizzati dal contenuto di tre sostanze *Zucchero*, *Alcool*, CO_2 , come riportato in tabella:

	B1	B2	B3
Zucchero	10%	30%	10%
Alcool	15%	10%	20%
CO_2	7 mg/lt	8 mg/lt	9 mg/lt

Ciascuno dei tre componenti base è disponibile in una quantità massima giornaliera (in lt) e ha un costo (in euro/lt):

	B1	B2	B3
disponib. (lt)	8000	8000	9000
costo (euro/lt)	5	7	6

I tre vini spumanti devono avere un certo contenuto delle tre sostanze (*Zucchero*, *Alcool*, CO_2). In tabella si riportano le quantità minime e massime delle tre sostanze nei due vini.

	Vino Secco		Vino Dolce	
	Min	Max	Min	Max
Zucchero	—	30%	2%	25%
Alcool	1%	40%	2%	30%
CO_2	1 mg/lt	10 mg/lt	2 mg/lt	15 mg/lt

Da indagini di mercato effettuate di recente dall'azienda, è emerso che, nel periodo pasquale, la domanda di vino Secco sarà superiore ai 600 lt/giorno mentre la produzione di vino Dolce non dovrà superare i 500 lt/giorno.

I prezzi di vendita dei due vini sono riportati in tabella (euro/lt).

	Vino Secco	Vino Dolce
prezzo (euro/lt)	20	22

Formulare un problema di PL che consenta di massimizzare i ricavi giornalieri dell'azienda.