1ª PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu - BATR 9 cfu)

25 luglio 2016

Cognome	**Nome**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**7 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$
\begin{aligned}
\min \quad & (x_1 + x_2 + 2)^2 \\
& 3x_1 + 4x_2 \geq 2 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\
& 3x_1 + 3x_2 \leq 10 \\
& -6x_1 + 3x_2 \geq -8 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(i) (**1,5 punti**) Determinare se esistono punti stazionari della funzione obiettivo e studiarne, se possibile, la natura.

(ii) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT nel punto $\widehat{x} = (0,\ \frac{5}{3})^T$ e dire se sono soddisfatte nel punto $\widehat{x}$ calcolando i moltiplicatori.

(iii) (**1,5 punti**) Scrivere il sistema per individuare una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\widehat{x} = (0,\ \frac{5}{3})^T$ e dire se esiste una soluzione.

(iv) (**2 punti**) Determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\tilde{x} = (\frac{4}{3},\ 2)^T$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$. Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa.

Esercizio 2. (**3 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & -2x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 8x_4 \\ & \\ & -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 \geq 1 \\ & -4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 \geq 1 \\ & x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

(i) (**3 punti**) Dire se i seguenti punti sono SBA del problema del punto (i) e, in caso affermativo, per ciascuna indicare le matrici di base e fuori base e scrivere i vertici corrispondenti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (**7 punti**)

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ & \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 2 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ & -6x_1 + 3x_2 \geq -8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1 punti**) Scrivere il problema nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(ii) (**2,5 punti**) Risolvere graficamente il problema primale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo; dire se il problema ammette soluzione e in caso determinarla.

(iii) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(iv) (**2 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, dire se il problema duale ammette soluzione e in caso determinarla.

Esercizio 4. (**5 punti**) Sia dato il problema di Programmazione multiobiettivo lineare

$$\begin{array}{ll} \max & \{2x_1 + x_2, x_1 + x_2\} \\ & \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 2 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ & -6x_1 + 3x_2 \geq -8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1 punti**) Individuare i due punti di ottimo riferiti ai due obiettivi (x^{*1}, x^{*2}) e i corrispondenti valori di riferimento ottimi dei due obiettivi (z^{*1}, z^{*2})

(ii) (**2 punti**) Disegnare la regione nello spazio degli obiettivi e individuare la frontiera di ottimi di Pareto

(iii) (**2 punti**) Scrivere le condizioni di KKT per il problema multiobiettivo e verificare se il punto $\hat{x} = (\frac{4}{3},\ 2)^T$ le soddisfa (NB attenzione il problema assegnato è in forma di massimizzazione).

Esercizio 5. (**5 punti**)

Sia dato il problema di programmazione lineare intera

$$\begin{array}{ll} \min & -2x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 8x_4 \\ & -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 \geq 1 \\ & -4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 \geq 1 \\ & x_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, 4 \\ & x_i \in Z,\ i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Sia dato il punto ammissibile intero $x_I = (0,\ 1,\ 1,\ 1)^T$ e sia $x^{(0)*} = (0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0)^T$ la soluzione ottima del problema rilassato

(i) (**1 punti**) Indicare i valori di lower e upper bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound; dire se è possibile chiudere il problema specificando le motivazioni.

(ii) (**4 punti**) Si scrivano i due sottoproblemi $\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}$ generati dal metodo del Branch-and-Bound separando rispetto alla variabile frazionaria e siano $x^{(1)*} = (0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{5}{2})^T$ e $x^{(2)*} = (\frac{1}{2},\ 0,\ 1,\ 0)^T$ le soluzioni ottime dei corrispondenti problemi rilassati. Dire se è possibile chiudere i problemi $\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}$ giustificando la risposta.

Esercizio 6. (**4 punti**)

Una fabbrica produce ombrelloni e sedie a sdraio. La capacità produttiva (unità) della fabbrica e i costi di produzione (euro per unità) sono riportati nella seguente tabella:

prodotto	quantità max	costi
ombrelloni	650	25
sedie a sdraio	1200	18

I prodotti devono essere consegnati a tre stabilimenti balneari A,B,C in diverse località. I costi di trasporto dipendono solo dallo stabilimento a cui si deve consegnare il prodotto e sono riportati nella seguente tabella (in migliaia di lire per unità):

stabilimento	costi trasporto
A	5
B	8
C	2

Ogni stabilimento ha una richiesta minima e massima di ombrelloni e sedie a sdraio, indicate nella tabella:

	A		B		C	
	min	max	min	max	min	max
ombrelloni	0	100	50	150	320	370
sedie a sdraio	70	250	0	350	300	–

Inoltre almeno il 65% della produzione complessiva deve essere, per vincoli di contratto, consegnata allo stabilimento C. I prezzi di vendita (euro per unità) sono riportati nella seguente tabella:

	prezzo
ombrelloni	31
sedie a sdraio	25

Si suppone che l'azienda possa vendere tutto quello che produce.

Scrivere un modello di PL che consenta di massimizzare il profitto dell'azienda.