1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu - BATR 9 cfu)

27 giugno 2016

Cognome	Nome

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**7 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$
\begin{aligned}
\min \quad & (x_1x_2 + \frac{1}{2})^2 + (x_2+3)^2 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
& 2x_1 - 5x_2 \leq 5 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq -5 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

(i) (**1,5 punti**) Determinare se esistono punti stazionari della funzione obiettivo (possibili minimi NON vincolati) e studiarne, se posisbile, la natura.

(ii) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT nel punto $\widehat{x} = (0, \ -1)^T$ e dire se sono soddisfatte nel punto $\widehat{x}$ calcolando i moltiplicatori.

(iii) (**1,5 punti**) Scrivere il sistema per individuare una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\widehat{x} = (0, \ -1)^T$ e dire se esiste una soluzione.

(iv) (**2 punti**) Determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\tilde{x} = (\frac{5}{2}, \ 0)^T$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$. Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa.

Esercizio 2. (**4 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1 + x_2 \\
 & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
 & 2x_1 - 5x_2 \leq 5 \\
 & 2x_1 + 3x_2 \geq -5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

(i) (**1 punti**) Scrivere il problema nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(ii) (**3 punti**) Dire se i seguenti punti sono SBA del problema del punto (i) e, in caso affermativo, per ciascuna indicare le matrici di base e fuori base e scrivere i vertici corrispondenti

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} \quad
\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 11 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \quad
\begin{pmatrix} -\frac{5}{8} \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{29}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Esercizio 3. (**6 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$
\begin{array}{ll}
\min & 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\
 & 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2,5 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo; dire se il problema ammette soluzione e in caso determinarla.

(iii) (**2 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, dire se il problema primale ammette soluzione e in caso determinarla.

Esercizio 4. (**5 punti**) Sia dato il problema di Programmazione multiobiettivo lineare

$$
\begin{array}{ll}
\max & \{-x_1, x_1 + x_2\} \\
 & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
 & 2x_1 - 5x_2 \leq 5 \\
 & 2x_1 + 3x_2 \geq -5 \\
 & x_1 \leq 4
\end{array}
$$

(i) (**1 punti**) Individuare i due punti di ottimo riferiti ai due obiettivi (x^{*1}, x^{*2}) e i corrispondenti valori di riferimento ottimi dei due obiettivi (z^{*1}, z^{*2})

(ii) (**2 punti**) Disegnare la regione nello spazio degli obiettivi e individuare la frontiera di ottimi di Pareto

(iii) (**2 punti**) Scrivere le condizioni di KKT per il problema multiobiettivo e verificare se il punto $\hat{x} = (\frac{5}{2},\ 0)^T$ le soddisfa.

Esercizio 5. (**5 punti**)

Sia dato il problema di programmazione lineare intera

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ & \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 - 5x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq -5 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_i \in Z,\ i = 1, \ldots, 2 \end{array}$$

(NB la regione ammissibile è quella del problema dell'esercizio 4; la funzione obiettivo è la seconda funzione dell'esercizio 4).

Sia dato il punto ammissibile intero $(0,\ 0)^T$

(i) (**1 punti**) Indicare i valori di lower e upper bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound; dire se è possibile chiudere il problema specificando le motivazioni.

(ii) (**4 punti**) Si utilizzi il metodo del Branch-and-bound per la soluzione

Esercizio 6. (**4 punti**)

Una fonderia utilizza quattro tipi di materiale grezzo M_i, per ottenere un prodotto finale. Ciascun materiale ha un diverso contenuto di alluminio, silicio e carbonio. La tabella che segue riporta la composizione di ciascun materiale (espresso in percentuale sul peso totale), insieme al costo unitario.

	% alluminio	% silicio	%carbonio	costo al kg
materiale 1	3	4	6	680
materiale 2	5	4	5	750
materiale 3	1	2.5	4	450
materiale 4	4	5	7	870

Il prodotto finale deve avere un contenuto percentuale di alluminio di almeno il 3% e non superiore all8%; un contenuto di silicio tra il 4% e il 5%; di carbonio non superiore al 5%. Formulare come PL il problema di pianificare la produzione di questa fonderia minimizzando i costi.