1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu - BATR 9 cfu)

4 aprile 2016

Cognome	**Nome**	
		VOTO

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**7 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & \tfrac{1}{2}(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (**1,5 punti**) Dire se le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti.

(ii) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT nel punto $\widehat{x} = (0,\ 3,\ 3)^T$ e dire se sono soddisfatte nel punto $\widehat{x}$ calcolando i moltiplicatori.

(iii) (**1,5 punti**) Scrivere il sistema per individuare una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\widehat{x} = (0,\ 3,\ 3)^T$ e dire se esiste una soluzione.

(iv) (**2 punti**) Determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\tilde{x} = (0,\ 3,\ 3)^T$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$. Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa.

Esercizio 2. (**5 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 4x_1 + x_2 - x_3 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 5 \\
& 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(i) (**2 punti**) Individuare tutti i vertici del problema

(ii) (**1 punti**) Scrivere il problema nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iii) (**2 punti**) Scrivere le SBA associate ai vertici individuati al punto (i) e per ciascuna indicare le matrici di base e fuori base.

Esercizio 3. (**5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 4x_1 + x_2 - x_3 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\
& 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo; dire se il problema ammette soluzione e in caso determinarla.

(iii) (**1,5 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, dire se il problema primale ammette soluzione e in caso determinarla.

Esercizio 4. (**5 punti**) Sia dato il problema di Programmazione multiobiettivo lineare

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \{-x_1, 5x_1 + 3x_2\} \\
& x_1 + 3x_2 \leq 4 \\
& -x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 2x_1 + x_2 \geq -1 \\
& x_1 \leq 2
\end{aligned}
$$

(i) (**1 punti**) Individuare i due punti di ottimo riferiti ai due obiettivi (x^{*1}, x^{*2}) e i corrispondenti valori di riferimento ottimi dei due obiettivi (z^{*1}, z^{*2})

(ii) (**2 punti**) Disegnare la regione nello spazio degli obiettivi e individuare la frontiera di ottimi di Pareto

(iii) (**2 punti**) Scrivere le condizioni di KKT per il problema multiobiettivo e verificare se il punto $\hat{x} = (\frac{3}{2},\ 0)^T$ le soddisfa.

Esercizio 5. (5 punti)

Sia dato il problema di programmazione lineare intera

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 3x_2 \\ & \\ & x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ & -x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \geq -1 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_i \in Z,\ i = 1, \ldots, 2 \end{array}$$

(NB la regione ammissibile è quella del problema dell'esercizio 4; la funzione obiettivo è la seconda funzione dell'esercizio 4).

Sia dato il punto ammissibile intero $(0,\ 0)^T$

(i) (**1 punti**) Indicare i valori di lower e upper bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound; dire se è possibile chiudere il problema specificando le motivazioni.

(ii) (**4 punti**) Si utilizzi il metodo del Branch-and-bound per la soluzione

Esercizio 6. (4 punti)

Un' industria manifatturiera necessita di due materie prime, tipo A e tipo B, e le può ordinare da due diverse case produttrici C_1 e C_2 nel 1^o o 2^o semestre. Il costo di acquisto per unità di materia prima c_{ij}^A, c_{ij}^B varia a seconda del periodo dell'anno $i = 1, 2$ in cui viene effettuato l'ordine e dalla casa produttrice $j = 1, 2$; la seguente tabella riporta questi costi in euro/ton per ogni tipo di materia e per ogni casa produttrice:

	A		B	
	C_1	C_2	C_1	C_2
Gennaio/Giugno	75	80	105	100
Luglio/Dicembre	60	55	85	90

Le materie prime sono disponibili in quantitativi limitati dipendente dalla casa produttrice. Tali quantità sono le stesse in ciascun semestre (gennaio/Giugno e luglio/dicembre). In tabella sono riportate le quantità massime $q_j^{A\max}, q_j^{B\max}$, $j = 1, 2$ disponibili per le due case produttrici.

	A		B	
	C_1	C_2	C_1	C_2
quantità max	450	350	350	600

L'industria manifatturiera necessita di un quantitativo minimo $q_i^{A\min}, q_i^{B\min}$ $i = 1, 2$ di materie prime in ogni periodo, come riportato nella seguente tabella:

	A	B
quantità min. 1^o semestre	600	350
quantità min. 2^o semestre	700	800

Formulare un modello di PL per la pianificazione degli acquisti minimizzando il costo complessivo.