1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu - BATR 9 cfu)

8 novembre 2016

Cognome	**Nome**

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

VOTO

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stato sostenuta.

Esercizio 1. (**7 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4 \\
& x_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_1 + 5x_2 \leq 10 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_2 \geq 0
\end{array}
$$

(i) (**1,5 punti**) Determinare se esistono punti stazionari della funzione obiettivo (possibili candidati minimi NON vincolati) ed eventualmente studiarne la natura. Dire se tali punti sono posisbili minimi del problema VINCOLATO.

(ii) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT nel punto $\tilde{x} = \left(-\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)^T$ e dire se sono soddisfatte nel punto $\widehat{x}$ calcolando i moltiplicatori.

(iii) (**1,5 punti**) Scrivere il sistema per individuare una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\tilde{x} = \left(-\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)^T$ e dire se esiste una soluzione.

(iv) (**2 punti**) Determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in $\hat{x}$. Individuare il valore dello spostamento massimo $t^{\max}$. Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa.

Esercizio 2. (**4 punti**)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 + 10x_2 + 3x_3 \\ & \\ & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + 5x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**2,5 punti**) Dire se i seguenti punti sono vertici del problema

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) (**0,5 punti**) Scrivere il problema nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b,\ x \geq 0$ con $b \geq 0$).

(iii) (**1 punti**) Scegliere tutti i vertice individuati al punto (i) e scrivere la SBA corrispondente relativa al poliedro in forma standard definito al punto (ii) indicando la matrice di base.

Esercizio 3. (**6 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 + 10x_2 + 3x_3 \\ & \\ & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + 5x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1,5 punto**) Scrivere il problema duale.

(ii) (**2,5 punti**) Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo; dire se il problema ammette soluzione e in caso determinarla.

(iii) (**2 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, dire se il problema primale ammette soluzione e in caso determinarla.

Esercizio 4. (**5 punti**) Sia dato il problema di Programmazione multiobiettivo lineare

$$\begin{array}{ll} \max & \{2x_1 + x_2, x_1 - x_2\} \\ & \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**1 punti**) Individuare i due punti di ottimo riferiti ai due obiettivi (x^{*1}, x^{*2}) e i corrispondenti valori di riferimento ottimi dei due obiettivi (z^{*1}, z^{*2})

(ii) (**2 punti**) Disegnare la regione nello spazio degli obiettivi e individuare la frontiera di ottimi di Pareto

(iii) (**2 punti**) Scrivere le condizioni di KKT per il problema multiobiettivo e verificare se il punto $\hat{x} = (\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})^T$ le soddisfa, determinando in caso i moltiplicatori.

Esercizio 5. (**5 punti**)

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare intera

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ & \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x \text{ intero} \end{array}$$

(NB la regione ammissibile è quella del problema dell'esercizio 4; la funzione obiettivo è la prima funzione dell'esercizio 4).

Sia dato il punto ammissibile intero $(1,\ 0)^T$

(i) (**1 punti**) Indicare i valori di lower e upper bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound; dire se è possibile chiudere il problema specificando le motivazioni.

(ii) (**4 punti**) Si utilizzi il metodo del Branch-and-bound per la soluzione

Esercizio 6. (**4 punti**)

Una piccola azienda di surgelati produce, tra gli altri, melanzane alla parmigiana. Si suppone di voler pianificare la produzione per tre mesi consecutivi (Aprile, Maggio, Giugno). Il prodotto può essere venduto nello stesso mese di produzione o immagazzinato e venduto nei mesi successivi. Il costo delle melanzane varia con la produzione stagionale, per cui si ipotizzza che il costo del prodotto finito (in €\quintale) in ogni mese sia quello riportato in tabella c_i per $i = 1, 2, 3$. Nella stessa tabella è riportata la domanda di mercato (in quintali) nei vari mesi d_i e la capacità produttiva dell'azienda (in quintali) P_i. Il magazzino per i surgelati ha una capacità (CAP) di 100 quintali. All'inizio del mese di aprile ci sono M_0=42 quintali disponibili in magazzino e alla fine di giugno si desidera avere almeno M_3=50 quintali. Formulare il problema di PL per soddisfare la domanda produttiva al costo minimo.

	Aprile	Maggio	Giugno
costo unitario (€\q) c_i	200	300	400
capacità produttiva (q) P_i	160	150	140
domanda (q) d_i	100	130	150