

1^a PROVA scritta di
RICERCA OPERATIVA (MMER 6 cfu - BATR 9 cfu)
8 febbraio 2016

Cognome

Nome

VOTO

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

IMPORTANTE: È possibile mantenere il voto della prova scritta per un massimo di tre mesi dalla data in cui è stata sostenuta.

Esercizio 1. (7 punti)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\min x_1x_2 + x_2x_3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_3$$

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-x_1 - x_2 = -1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- (i) **(1,5 punti)** Dire se le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti.
- (ii) **(2 punti)** Scrivere le Condizioni di KKT nel punto $\hat{x} = (0, 1, 0)^T$ e dire se sono soddisfatte nel punto \hat{x} calcolando i moltiplicatori.
- (iii) **(1,5 punti)** Scrivere il sistema per individuare una direzione ammissibile e di discesa nel punto $\hat{x} = (0, 1, 0)^T$ e dire se esiste una soluzione.
- (iv) **(2 punti)** Determinare una direzione ammissibile lungo la quale è possibile spostarsi da $\hat{x} = (1, 0, 2)^T$ attivando almeno un vincolo in più rispetto a quelli attivi in \hat{x} . Individuare il valore dello spostamento massimo t^{\max} . Dire se la direzione individuata risulta essere di discesa.

Esercizio 2. (5 punti)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 - x_2 - 4x_3 \\ & x_1 - x_2 - x_3 \leq 2 \\ & -x_1 - x_2 = -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) **(2 punti)** Individuare tutti i vertici del problema
- (ii) **(1 punto)** Scrivere il problema nella forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso ($Ax = b$, $x \geq 0$ con $b \geq 0$).
- (iii) **(2 punti)** Scrivere le SBA associate ai vertici individuati al punto (i) e per ciascuna indicare le matrici di base e fuori base.

Esercizio 3. (5 punti)

Sia dato il problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + x_2 + 4x_3 \\ & x_1 - x_2 - x_3 \leq 2 \\ & -x_1 - x_2 = -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) **(1,5 punto)** Scrivere il problema duale.
- (ii) **(2 punti)** Risolvere graficamente il problema duale: disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo; dire se il problema ammette soluzione e in caso determinarla.
- (iii) **(1,5 punti)** Utilizzando la teoria della dualità, dire se il problema primale ammette soluzione e in caso determinarla.

Esercizio 4. (5 punti) Sia dato il problema di Programmazione multiobiettivo lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & \{-x_1, -x_1 - 2x_2\} \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 4x_1 - x_2 \geq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (i) **(1 punto)** Individuare i due punti di ottimo riferiti ai due obiettivi (x^{*1}, x^{*2}) e i corrispondenti valori di riferimento ottimi dei due obiettivi (z^{*1}, z^{*2})
- (ii) **(2 punti)** Disegnare la regione nello spazio degli obiettivi e individuare la frontiera di ottimi di Pareto
- (iii) **(2 punti)** Scrivere le condizioni di KKT per il problema multiobiettivo e verificare se il punto $\hat{x} = (\frac{9}{4}, 0)^T$ le soddisfa.

Esercizio 5. (5 punti)

Sia dato il problema di programmazione lineare intera

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 4x_1 - x_2 \geq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, 2 \end{aligned}$$

(NB la regione ammissibile è quella del problema dell'esercizio 4; la funzione obiettivo è la seconda funzione dell'esercizio 4).

Sia dato il punto ammissibile intero $(0, 3)^T$

- (i) (1 punto) Indicare i valori di lower e upper bound alla prima iterazione del metodo di Branch and Bound; dire se è possibile chiudere il problema specificando le motivazioni.
- (ii) (4 punti) Si utilizzi il metodo del Branch-and-bound per la soluzione

Esercizio 6. (4 punti)

Un'industria produce due tipi di fertilizzanti (F1, F2) utilizzando tre materie prime (M1, M2, M3) che hanno le seguenti caratteristiche (contenuti percentuali di azoto e fosforo e costo in migliaia di lire al quintale)

	M1	M2	M3
azoto	15	18	20
fosforo	4	7	3.5
costo	16	19	17

I due fertilizzanti sono ottenuti miscelando le tre materie prime e si differenziano tra loro per il contenuto di azoto e fosforo; in particolare, il fertilizzante F1 deve avere un contenuto di azoto non inferiore al 17% e di fosforo compreso tra il 5% e il 6%; il fertilizzante F2 deve avere un contenuto di azoto non superiore al 20% e di fosforo non inferiore al 7%. Costruire un modello lineare che permetta di determinare le quantità di ciascuna delle materie prime da utilizzare in ciascuno dei due tipi di fertilizzante in modo da minimizzare il costo complessivo e sapendo che devono essere immessi sul mercato almeno 300 quintali di fertilizzante F1 e almeno 400 quintali di fertilizzante F2. Tenere inoltre conto che del fatto che nella fabbricazione del fertilizzante F1, se viene utilizzata materia prima M1 allora non può essere utilizzata materia prima M3.