ESERCIZIO 1

i) l'insieme ammissibile è un poliedro, dunque si tratta di verificare se la f.o. è convessa.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x_1-2)+e^{x_1} \\ 2x_2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2+e^{x_1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si tratta di matrice diagonale con elementi positivi $\Rightarrow \nabla^2 f \succ 0$ e la f. è strettamente convessa. Le KKT sono CNS.

ii) $\hat{x} = \begin{pmatrix} -8/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ verifico ammissibilità $\begin{cases} \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2 & \text{ok} \\ -\frac{8}{3} - \frac{4}{3} = -4 & \text{ok} \\ +\frac{56}{3} - \frac{20}{3} = \frac{36}{3} = 12 > -35 & \text{ok} \end{cases}$

$I(\hat{x}) = \{1,2\}$

$$\nabla f\begin{pmatrix} -8/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(-\frac{8}{3}-2\right)+e^{-8/3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{28}{3}+e^{-8/3} \\ -4/3 \end{pmatrix} \qquad \text{NB } -\frac{28}{3}+e^{-8/3}<0$$

$$\begin{cases} \nabla f^T d < 0 \\ a_1^T d \le 0 \\ a_2^T d \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(-\frac{28}{3}+e^{-8/3}\right) d_1 - \frac{4}{3} d_2 < 0 \\ -d_1 + d_2 \le 0 \\ d_1 + 2d_2 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} d_2 > \frac{3}{4}\left(-\frac{28}{3}+e^{-8/3}\right) d_1 \\ d_2 \le d_1 \\ d_2 \ge -\frac{1}{2} d_1 \end{matrix}$$

$\exists\, \bar{d}$, ad es. $\bar{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa il sistema

iii) $\hat{x}$ è ammissibile.

$$\nabla f\begin{pmatrix} -8/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1(-x_1+x_2-2)=0 \quad \lambda_2(-4-x_1-2x_2)=0 \quad \lambda_3(-35+7x_1-10x_2)=0$

$\lambda_i \ge 0 \quad i=1,2,3$

Non possono essere soddisfatte poiché $\exists\, \bar{d}$ dal punto ii)

Per ulteriore verifica calcolo λ. Dalla complementarità

$$\lambda_3 = 0 \quad \begin{cases} -\frac{28}{3}+e^{-8/3} - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -4/3 + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3\lambda_2 = -\frac{32}{3}+e^{-8/3} < 0 \quad \text{NO}$$

iv) $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ verifico ammissibilità

$-2+4=2$ ok $\qquad I(\tilde{x}) = \{1\}$

$2+8 > -4$ ok

$a_1^T d = 0 \qquad -d_1 + d_2 = 0$

$-14+40 \geq -35$ ok

Direzioni del tipo $\bar{d} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix}$ con $\beta \in \mathbb{R}$ mantengono attivo il 1° vincolo.

verifico se $\exists j \notin I(\tilde{x})$ t.c. si attivi, ovvero $\exists j \in \{2,3\}$

$a_2^T \bar{d} < 0 \qquad \beta + 2\beta < 0 \qquad \beta < 0$

$a_3^T \bar{d} < 0 \qquad -7\beta + 10\beta < 0 \qquad \beta < 0$

$\beta = -1 \quad \bar{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

quindi per $\beta < 0$ si attivano ~~possono~~ potenzialmente ~~sia~~ i vincoli 2,3

Calcolo t^{max} $\qquad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 4-t \end{pmatrix}$

$\begin{cases} +2-t+8-2t \geq -4 \\ -14+7t+40-10t \geq -35 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3t \geq -14 \\ -3t \geq -61 \end{cases} \qquad \begin{matrix} t \leq 14/3 \\ t \leq 61/3 \end{matrix}$

$t^{max} = \frac{14}{3}$ si attiva il vincolo 2.

$\nabla f^T \bar{d} = \begin{pmatrix} e^2 \\ 8 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} < 0$ direzione di discesa

ESERCIZIO 2

i) SBA il pb. è in primo standard

$y_1 = 0 \quad B = (A_2\ A_3) \quad \begin{cases} x_2 - 7x_3 = 1 \\ 2x_2 + 10x_3 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 + 7x_3 \\ 2 + 14x_3 + 10x_3 = 4 \end{cases}$

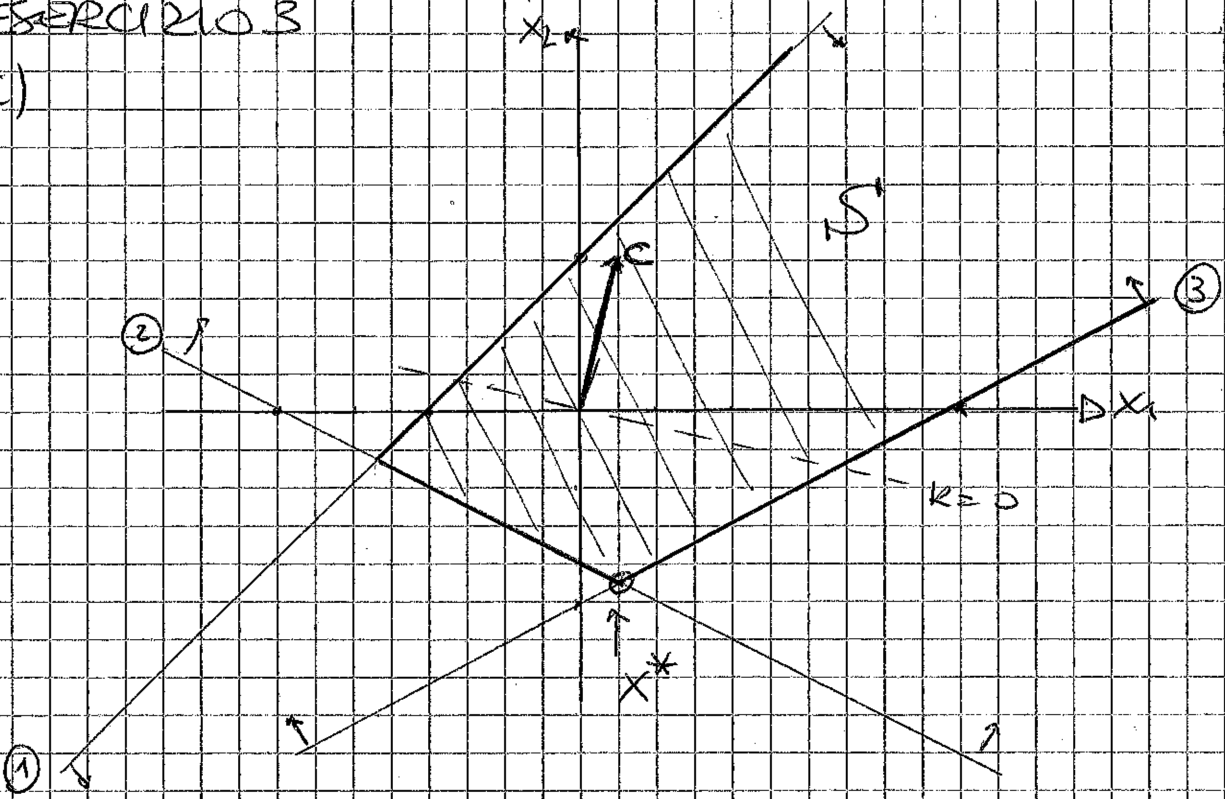
$\begin{cases} x_2 = 1 + 7x_3 \\ 24x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 19/12 \\ x_3 = 1/12 \end{cases} \quad SBA^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 19/12 \\ 1/12 \end{pmatrix} \quad B^1 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \quad N^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$y_2 = 0 \quad B = (A_1\ A_3) \quad \begin{cases} -x_1 - 7x_3 = 1 \\ x_1 + 10x_3 = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = -7x_3 - 1 < 0 \text{ NO} \\ 3x_3 = 5 \quad x_3 = \frac{5}{3} \end{matrix}$

$y_3 = 0 \quad B = (A_1\ A_2) \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 - 1 \\ 3x_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2/3 \\ x_2 = 5/3 \end{cases} \quad SBA^2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix}$

ESERCIZIO 3

i)



$$x^*: \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4 \\ -7x_1 + 10x_2 = -35 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -4 - 2x_2 \\ 28 + 14x_2 + 10x_2 = -35 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -4 + \frac{42}{8} = \frac{5}{4} \\ 24x_2 = -63 \quad x_2 = -\frac{21}{8} \end{cases}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -21/8 \end{pmatrix} \qquad c^T x^* = \frac{5}{4} - \frac{21}{2} = -\frac{37}{4}$$

ii) Scrivo primale in forma canonica

$$\min \; x_1 + 4x_2 \qquad\qquad \max \; -2y_1 - 4y_2 - 35y_3$$

$$x_1 - x_2 \geq -2 \qquad\qquad y_1 + y_2 - 7y_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 \geq -4 \qquad\qquad -y_1 + 2y_2 + 10y_3 = 4$$

$$-7x_1 + 10x_2 \geq -35 \qquad\qquad y_i \geq 0 \quad i = 1,2,3$$

iii) Complement. primale

$$y_1(x_1 - x_2 + 2) = 0 \qquad I(x^*) = \{2,3\} \Rightarrow y_1^* = 0$$

$$y_2(x_1 + 2x_2 + 4) = 0$$

$$y_3(-7x_1 + 10x_2 + 35) = 0$$

Ammissibilità duale $\begin{cases} y_2 - 7y_3 = 1 \\ 2y_2 + 10y_3 = 4 \\ y_1^* = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 1 + 7y_3 \\ 2 + 14y_3 + 10y_3 = 4 \end{cases}$

$$y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 19/12 \\ 1/12 \end{pmatrix} \qquad b^T y^* = -4 \cdot \frac{19}{12} - 35 \cdot \frac{1}{12} = \frac{-76 - 35}{12} = -\frac{\cancel{111}^{\,37}}{\cancel{12}_{\,4}} \text{ ok}$$

iv) Analisi sensibilità $c^T X^*_\varepsilon = c^T X^* + \varepsilon \cdot \lambda_i^*$

Se cambio 2° vincolo $-4 \to -4+\varepsilon$

$\Delta f = c^T X^*_\varepsilon - c^T X^* = \varepsilon \lambda_2^* = \frac{19}{12}\varepsilon$

v) Forma standard

min $c^T X$

$Ax = b \geq 0$

$x \geq 0$

$$\min \; x_1 + 4x_2$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$
$$7x_1 - 10x_2 + x_5 = 35$$
$$x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

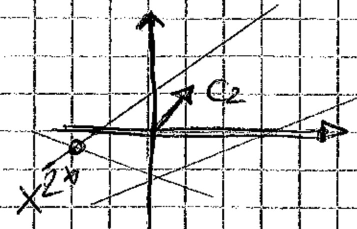
Per x_1 e x_2 scompongo e sostituisco

$x_1 = x_1^+ - x_1^-$, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ $\quad x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^- \geq 0$

ESERCIZIO 4

La regione ammissibile è quella dell'ES.2 e il 1° obiettivo è lo stesso $\Rightarrow x^{*1} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -21/8 \end{pmatrix}$ $z^{*1} = -\frac{37}{4}$ $\left[z_2(x^{*1}) = -\frac{11}{8} \right]$

Per l'obiettivo 2



x^{2*}: $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = x_2 - 2 \\ 3x_2 = -2 \end{cases}$ $x_1 = -\frac{8}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$

$x^{*2} = \begin{pmatrix} -8/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ $z^{2*} = -\frac{10}{3}$ $\left[z_1(x^{*2}) = -\frac{16}{3} \right]$

ii) $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

z_1	z_2
2	2

entrambi i punti determinati al punto i) dominano questo vettore

z_1	z_2
$-\frac{37}{4}$	$-\frac{11}{8}$
$-\frac{16}{3}$	$-\frac{10}{3}$

iii) $\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $I(\hat{x}) = \{2\}$

$\beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_i \geq 0 \quad \beta_j > 0$

$\lambda_1(-x_1 + x_2 - 2) = 0 \quad \lambda_2(x_1 + 2x_2 + 4) = 0 \quad \lambda_3(-7x_1 + 10x_2 + 35) = 0$

Dalla complementarità $\Rightarrow \lambda_1^* = \lambda_3^* = 0$

ESERCIZIO 4 (continua) (5)

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 - \lambda_2 = 0 \\ 4\beta_1 + \beta_2 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad 5\beta_1 + 2\beta_2 = 3\lambda_2$$

$\lambda_2 = \beta_1 + \beta_2 \qquad 4\beta_1 + \beta_2 - 2\beta_1 - 2\beta_2 = 0$

$2\beta_1 - \beta_2 = 0 \qquad \beta_2 = 2\beta_1 \qquad \lambda_2 = \frac{5}{3}\beta_1 + \frac{2}{3}\beta_2 > 0$

$\beta_1 = 1 \quad \beta_2 = 2 \quad \lambda_2 = 3$ ok

ESERCIZIO 5

i) Si tratta di pb di minimo $c^T x^*_{RL} \le c^T x^*_I \le c^T x_I$

dove x^*_{RL} è la soluzione del pb rilassato.

$LB = c^T x^*_{RL} = (1 \quad 4)\begin{pmatrix} 5/4 \\ -21/8 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} - \frac{42}{4} = -\frac{37}{4}$ già calcolato al pto. i) di ES 3

$UB = c^T x_I = (1 \; 4)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 8$

non è possibile chiudere il problema

ii) Separo rispetto $x^*_1 = \frac{5}{4} = 1{,}25 \qquad \lfloor x^*_1 \rfloor = 1 \qquad \lceil x^*_1 \rceil = 2$

$P_1 : P_0 \cup \{x_1 \le 1\} \qquad P_2 : P_0 \cup \{x_1 \ge 2\}$

ESERCIZIO 6

VARIABILI DI DECISIONE $\quad x_i$ = q.tà miscela in hl ettl

VINCOLI: disponibilità di caffè

$$\sum_{j=1}^{M} a_{ij} x_j \le q_i^{max} \qquad \forall i = 1,2,3,4 = N$$

$$x_j \ge R_j^{min} \qquad j = 1 \ldots M$$

F. OBIETTIVO $\quad$ max Ricavo − Costi

$$\text{RICAVO} = \sum_{j=1}^{M} p_j M_j \quad \text{(vendite miscela)}$$

$$\text{COSTI} = \sum_{i=1}^{N} c_i \sum_{j=1}^{M} a_{ij} x_j$$

$$x_i \ge 0 \quad \forall i$$