

Capitolo 1

Introduzione

La Ricerca Operativa è una disciplina relativamente giovane. Il termine *Ricerca Operativa* è stato coniato in ambito militare verso la fine degli anni '30 e deriva dal termine inglese "*Operational Research*", ovvero la "ricerca sulle operazioni (militari)".

La Ricerca Operativa (di seguito indicata con l'acronimo *RO*) si occupa dello sviluppo e dell'applicazione di metodi quantitativi per la soluzione di problemi di decisione che si presentano nella gestione di imprese e organizzazioni.

Quando la complessità dei sistemi era relativamente contenuta, e la quantità di dati disponibili estremamente limitata, il personale esperto era sufficiente a prendere le decisioni necessarie alla conduzione dell'impresa.

La crescente complessità dei sistemi aziendali congiuntamente all'enorme quantità di dati messa a disposizione dall'informatizzazione capillare ha reso indispensabile l'utilizzo di strumenti automatici di decisione che attraverso la modellazione matematica permettano la soluzione di problemi di grandi dimensioni.

La RO, quindi, è caratterizzata dall'uso di modelli matematici definiti e risolti al fine di fornire indicazioni ai "decisioni" nell'atto della scelta. Non a caso, la RO è anche nota come *management science*, e cioè la Scienza della Gestione, definizione che ne sintetizza finalità e ambizioni.

1.1 Breve storia della Ricerca Operativa

Il termine Ricerca Operativa, si è detto, è legato alle prime applicazioni della RO per aumentare l'efficienza di operazioni militari della Seconda Guerra Mondiale. Tuttavia esistono esempi importanti di anticipazione dei metodi della RO in anni più lontani; il più famoso risale a F. Taylor che nel 1885 elaborò uno studio sui metodi di produzione; prima ancora, nel 1776, G. Monge aveva studiato un problema di trasporti. Tuttavia la nascita della RO è legata agli studi che negli anni immediatamente precedenti alla Seconda Guerra Mondiale vennero condotti in Gran Bretagna per risolvere problemi strategici e tattici in operazioni militari. Più in particolare questi studi erano legati all'uso efficiente di un nuovo strumento di difesa: il radar. Infatti nel 1937 la Royal Air Force iniziò degli esperimenti di un sistema di controllo della difesa aerea

⁰A questo paragrafo sono associate le slide della prima lezione disponibili sul sito

basato sull'uso di una stazione radar situata a Bawdsey Research Station, nella costa est; già dai primi esperimenti si resero conto che era molto difficile gestire efficientemente le informazioni provenienti dal radar. Nel luglio 1938 furono compiuti altri esperimenti con l'aggiunta di quattro stazioni radar lungo la costa nella speranza che il sistema di controllo migliorasse sia in copertura sia in efficienza; invece non fu così; dai nuovi esperimenti emersero seri problemi: c'era la necessità di coordinare e correlare le tante informazioni, spesso anche in conflitto tra di loro, che venivano ricevute dalle stazioni radar aggiunte. Nell'imminenza della Guerra si rese necessario tentare qualche nuovo approccio; perciò il sovrintendente della Bawdsey Research Station propose di sviluppare un programma di ricerca che riguardasse gli aspetti *operativi* del sistema e non più solamente quelli prettamente tecnici che erano da considerare soddisfacenti. Il termine "*Operational Research*" – Ricerca nelle operazioni (militari) – fu coniato per descrivere questa nuova branca delle scienze applicate. Fu quindi selezionato un gruppo di scienziati di vari discipline per costituire un "OR team"; il progetto fu diretto dal comandante in capo della Royal Air Force, Air Chief Marshal Sir Hugh Dowding. Nell'estate del 1939 la Gran Bretagna effettuò l'ultima esercitazione pre-bellica dove si evidenziò un notevole miglioramento nelle operazioni di difesa aerea grazie al contributo del gruppo di scienziati. Nacque quindi una vera e propria sezione che più tardi, nel 1941, prese il nome formale di "Operational Research Section". Durante il conflitto mondiale furono molteplici e importanti i contributi strategici di questa sezione permettendo di salvare piloti e aerei.

Al termine della guerra, alcuni degli scienziati coinvolti nel progetto formarono nuclei di ricercatori per lo sviluppo post bellico e la loro attività si estese a campi diversi da quello militare; in particolare, con l'espandersi delle iniziative industriali e con l'avvento dei computer che sono uno strumento essenziale per la risoluzione dei problemi, c'è stata un'espansione dell'utilizzo della RO all'interno di diverse realtà applicative.

Dagli anni '60 in poi le applicazioni della RO hanno avuto diffusione crescente, inizialmente nell'ambito di grandi gruppi industriali e successivamente, grazie anche alla disponibilità di grandi potenze di calcolo a costi contenuti, in quasi ogni settore industriale, nei servizi e nelle amministrazioni pubbliche.

1.2 La Ricerca Operativa oggi

Ai nostri giorni la rilevanza applicativa delle tecniche della RO è riconosciuta e apprezzata in ambito industriale. Negli ultimi cinque anni il numero di addetti del settore è infatti cresciuto di un fattore 100. Contestualmente, si è allargata la richiesta di esperti di RO nelle imprese manifatturiere e di servizi: un laureato, esperto di tecniche della RO può ragionevolmente aspirare, per esempio, a ricoprire incarichi di responsabilità nelle industrie manifatturiere, nella assicurazioni, nel marketing, nelle società di consulenza aziendale, nella pianificazione e, sempre di più, nelle telecomunicazioni.

Alcuni esempi di problemi possono essere risolti per mezzo delle tecniche della RO sono i seguenti:

- *Finanza e Investimenti*;
si vuole rispondere a domande del tipo: quanto dobbiamo investire, e come? Dove rimediare i capitali necessari? Quanto ci costerà? Alcuni esempi sono:
 - *Selezione degli investimenti*;
si tratta di scegliere, fra un vasto insieme di alternative di investimento, quali atti-

vare e quali no in presenza di vincoli di budget e con l'obiettivo di massimizzare i ricavi.

– *Scelta del portafoglio;*

consiste nel decidere in quali titoli e con quali quote investire i nostri capitali in modo da massimizzare il ricavo atteso, oppure minimizzare il rischio, etc.

– *Determinazione del prezzo di derivati finanziari;*

si vuole determinare il prezzo di un prodotto derivato finanziario (per esempio di un'opzione o di un future) in funzione del tempo e dell'andamento del titolo sottostante.

• *pianificazione della produzione;*

come assegnare la forza lavoro alle varie attività della nostra impresa? Su quali macchine e per quanto tempo ci conviene effettuare i nostri processi?

Si tratta di pianificare i livelli di produzione e/o l'utilizzazione di risorse; si hanno spesso problemi di *allocazione ottima di risorse* cioè problemi riguardanti la distribuzione di risorse limitate tra alternative concorrenti in modo da minimizzare il costo complessivo o massimizzare il guadagno totale; tali risorse possono essere materie prime, manodopera, tempi di lavoro su macchine, capitali investiti.

• *gestione ottima delle scorte;*

si tratta di determinare i livelli di produzione e di scorte nella gestione di materiali grezzi, prodotti in lavorazione etc.; quando e quanto conviene riordinare materiali o beni in modo da ottenere il miglior compromesso fra costi di riordino e di produzione/acquisto e costi di immagazzinamento. Conviene, cioè, ordinare o produrre più spesso minori quantità per far fronte alla domanda corrente, oppure ordinare/produire maggiori quantità e lasciarle in magazzino per soddisfare anche la domanda futura?

• *localizzazione e dimensionamento di impianti;*

Quanti depositi di un'impresa di distribuzione alimentare costruire e dove localizzarli per servire i negozi a dettaglio in un'area d'interesse? Dove costruire degli ospedali (o scuole o stazioni dei vigili del fuoco) in modo da ottimizzare il servizio fornito? Dove conviene costruire le stazioni di base di una rete GSM/UMTS per coprire soddisfacentemente territorio e traffico, e con che potenza dovranno trasmettere? In senso lato, si tratta di problemi in cui si deve decidere dove installare "impianti di produzione" in modo da "rifornire" in modo ottimale aree distribuite su un territorio.

• *progetto di reti di comunicazione / telecomunicazione;*

si tratta di definire i collegamenti e dimensionare le capacità di una rete stradale, di telecomunicazione, di trasmissione dati, etc., in modo da garantire il traffico tra le varie origini e destinazioni e minimizzare il costo complessivo; ad esempio, per instradare le comunicazioni telefoniche e dati fra Roma e Venezia, conviene costruire una nuova linea ad alta velocità in fibra ottica fra Firenze e Bologna oppure installare un ponte radio a larga banda?

• *determinazione di flussi ottimi;* si devono inviare merci (informazioni, telecomunicazioni, corrente elettrica, etc.) da alcune sorgenti (origini) a un certo numero di destinazioni utilizzando una rete di strade (fibre ottiche, doppi telefonici, cavi coassiali, emettitori) in modo da soddisfare le richieste minimizzando i costi di trasporto.

- *assegnazione di frequenze di trasmissione;*
quali frequenze (prese da una banda limitata) devo assegnare a una rete di trasmettitori radio-televisivi in modo da minimizzare le interferenze reciproche o massimizzare la copertura del territorio?
- *sequenziamento;*
quali processo o operazione effettuare prima e quali dopo? Per esempio, come sequenziare i treni sulla rete in modo da evitare conflitti sulle tratte e minimizzare i tempi morti, le attese alle stazioni, etc.?
- *project planning;*
come sequenziare le molteplici attività di un progetto? Quanto durerà il progetto? Come devono essere gestite le risorse?
- *allocazione ottima di componenti elettronici (VLSI design);*
come disegnare una piastra madre in modo da minimizzare le lunghezze dei percorsi seguiti dai segnali elettrici?
- *determinazione dei turni del personale;*
si tratta, ad esempio, di assegnare ai convogli il personale viaggiante sui treni (conducenti, bigliettai, etc.) in modo da minimizzare il numero di viaggi "a vuoto" (necessari per riportare il personale alla loro sede). Un problema analogo si presenta nell'assegnazione di equipaggi (piloti, hostess, steward) a voli.
- *manutenzione di beni;*
cioè il problema di decidere quando e se effettuare la manutenzione di alcuni beni soggetti ad usura, in modo da minimizzare il costo complessivo.
- *istadamento di veicoli;*
quali percorsi devono seguire i veicoli di una flotta di automezzi per, ad esempio, raccogliere l'immondizia, o rifornire una rete di negozi, in modo da minimizzare le distanze complessive percorse?
- *studi sulla struttura del DNA;*
come assegnare sequenze a geni minimizzando la probabilità dell'errore sperimentale? Come determinare un albero filogenetico massimizzando la verosimiglianza?
- *progettazione di forme ottime;*
che forma deve avere una macchina in modo da presentare meno resistenza possibile all'aria? Che profilo deve avere l'ala di un aereo in modo da massimizzare la portanza?
- *calcolo delle traiettorie ottime;*
qual è la traiettoria che permette ad un veicolo spaziale di arrivare sulla luna e tornare usando la quantità minima di carburante?
- *ricostruzione di immagini;*
come si possono visualizzare le informazioni fornite, per esempio, da una TAC in modo da renderle più leggibili possibili per il medico?
- *progettazione strutturale ;*
qual è il progetto di un ponte o di un grattacielo che resiste meglio a venti molto forti o alle sollecitazioni derivanti da un terremoto?

- *yield management* ;

Letteralmente traducibile come "Gestione del ritorno economico". In una azienda caratterizzata da varietà di servizi e di prezzi, domanda variabile nel tempo, stabilire quanti e quali servizi vendere avendo incertezza sulla domanda futura, allo scopo di massimizzare il profitto globale. Si tratta di un problema diffuso tra le compagnie di trasporto aereo, ferroviario, marittimo, ma anche per catene alberghiere e di noleggio auto.

Questa lista, lungi dall'essere esaustiva, serve a mettere in evidenza le potenzialità degli strumenti della RO nella risoluzione di problemi applicativi complessi e disparati.

In Italia la penetrazione della RO è stata piuttosto lenta. La situazione è rovesciata negli Stati Uniti e nell'Europa Centro-Settentrionale ove la crescita del settore è stata formidabile. Le ragioni del ritardo sono in primo luogo culturali: mancanza di conoscenze approfondite da parte delle aziende, insufficiente disseminazione dei risultati da parte dell'accademia. Lentamente, questa situazione va modificandosi anche in Italia, e la sensibilità delle aziende è fortemente cresciuta negli ultimi due-tre anni. In particolare ci si è resi conto che l'informatizzazione capillare e l'accresciuta potenza di calcolo non sono sufficienti a risolvere i problemi dell'organizzazione aziendale in modo ottimale.

A confermare questo asserto si consideri il seguente, illuminante esempio (dovuto a G. B. Dantzig¹): si supponga di essere a capo di un'azienda che impiega 70 dipendenti e deve assegnare ciascuno di essi a 70 differenti mansioni; poiché le capacità lavorative di ogni singolo dipendente sono diverse, non è indifferente per l'azienda come effettuare l'assegnamento. Naturalmente si deve fare in modo che ciascun dipendente sia assegnato ad una sola mansione e che ciascuna mansione sia svolta esattamente da un dipendente. Il problema consiste nel confrontare le 70! possibilità che ci sono per selezionare quella migliore nel senso che permetta di ottenere il maggiore utile per l'azienda. Le possibilità sono un numero molto grande, più grande di 10^{100} . Ora si supponga di disporre di un calcolatore capace di effettuare un milione di calcoli al secondo e che sia in funzione dal tempo del big bang; avrebbe questo calcolatore oggi nell'anno 2000 esaminato tutte le 70! combinazioni possibili? La risposta è no. Supponiamo allora di disporre di un calcolatore che possa effettuare un bilione di assegnamenti per ogni nano secondo; la risposta sarebbe ancora no. Supponiamo allora di riempire la superficie terrestre di calcolatori di questo tipo che lavorano in parallelo; la risposta sarebbe ancora no. Si dovrebbe disporre in verità di 10^{40} terre ciascuna ricoperta di calcolatori di questo tipo, in funzione dal tempo del big bang fino a quando il sole si raffredderà.

Da questo esempio facile da enunciare si deduce come in certe situazioni sia assolutamente impossibile esaminare tutti i casi possibili per determinare qual è il migliore. Per questo, prima dell'avvento della RO, l'unica possibilità era affidarsi al buon senso di persone guidate dall'esperienza che stabilivano regole "ad hoc" di base che dovevano essere seguite per risolvere i problemi (*"ad hoc" ground-rule approach*).

A questo tipo di approccio si contrappone la RO, il cui contributo centrale consiste nell'introduzione del cosiddetto *approccio modellistico-ottimizzatorio* per la soluzione di un problema di decisione. In questo approccio si organizza l'analisi di un problema reale in due fasi:

- la rappresentazione del problema attraverso un *modello matematico* che ne astragga gli

¹G.B. Dantzig - *Linear Programming the story about it began: some legends, a little about historical significance, and comments about where its many mathematical programming extensions may be headed* in History of Mathematical programming - a collection of personal reminiscences, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan and A. Schrijver eds., North Holland (1991).

aspetti essenziali e che schematizzi le interrelazioni esistenti tra i diversi aspetti del fenomeno che si sta studiando;

- lo sviluppo di *metodi matematici efficienti* (algoritmi di soluzione) per determinare una soluzione ottima del problema o una sua buona approssimazione.

Naturalmente, per costruire correttamente un modello matematico-ottimizzatorio che rappresenti un particolare fenomeno, si devono individuare i parametri di controllo significativi e un criterio per la valutazione della qualità della soluzione. La determinazione del modello è un'attività complessa e non completamente formalizzabile, che deve far ricorso da una parte a una conoscenza approfondita delle caratteristiche del problema in esame e dall'altra a strumenti che provengono da diverse branche della matematica. Una volta determinato il modello corretto, la RO si occupa di fornire una procedura esplicita per determinare una soluzione di un problema; tale procedura può essere rappresentata da metodi matematici analitici o, come più spesso accade, da metodi numerici che determinano la soluzione del problema mediante specifici algoritmi di calcolo. Da quanto detto si può capire come la RO sia una metodologia tipicamente interdisciplinare, applicabile nei più svariati contesti e come proprio dagli stimoli provenienti da campi anche molto distanti tra di loro tragga una delle principali ragioni della sua attuale vitalità.

1.3 L'approccio modellistico

Il termine *modello* è di solito usato per indicare una costruzione artificiale realizzata per evidenziare proprietà specifiche di oggetti reali. Esistono modelli concreti (come ad esempio i prototipi di aerei o automobili), ma più spesso, come nella Ricerca Operativa, si considerano *modelli astratti* cioè *modelli matematici* che usano il simbolismo dell'algebra per mettere in evidenza le relazioni principali dell'oggetto che deve essere modellato. I modelli di cui si tratterà in seguito sono quindi modelli matematici, e sono costituiti da un insieme di relazioni che descrivono in modo semplificato, ma rigoroso, uno o più fenomeni del mondo reale. La nozione di modello matematico per rappresentare il mondo reale non è certo nuova: già Pitagora nel IV secolo a.C. tentava di costruire un modello matematico dell'Universo. L'interesse per la modellistica matematica è notevolmente cresciuto e attualmente si confida che attraverso modelli matematici sia possibile rappresentare molteplici aspetti del mondo reale e studiarne le proprietà. Ciò ha portato ad un enorme sviluppo delle applicazioni della modellistica matematica anche al di fuori delle tradizionali applicazioni alle scienze fisiche. Si è così avuta di fatto una vasta utilizzazione di modelli matematici in settori lontani dagli ambiti più tradizionali come, ad esempio, le scienze sociali, la biologia, le scienze ambientali, la psicologia. Come esempi concreti, si pensi agli studi sulla dinamica della popolazione, sulla diffusione delle epidemie, sul risanamento ambientale. Questa notevole diffusione della modellistica matematica è anche dovuta al fatto che l'evoluzione di un modello matematico può essere rapidamente studiata grazie all'uso di moderni calcolatori elettronici.

È evidente come in molti casi le situazioni rappresentate da un modello sono molto complesse e alcune volte influenzate da fenomeni di natura aleatoria; per questa ragione, sono state definite diverse classi di modelli matematici: *modelli stocastici* che considerano grandezze che possono essere influenzate da fenomeni aleatori e *modelli deterministici* che considerano grandezze esatte; inoltre a seconda che le interazioni tra le grandezze sono immediate o distribuite nel tempo, si parla di *modelli statici* e di *modelli dinamici*.

L'approccio modellistico per risolvere un problema di decisione o, più in generale, l'impiego di metodi matematici per la soluzione di problemi applicativi, viene di solito realizzato attraverso diverse fasi. Tali fasi possono essere schematizzate nel seguente modo:

- **Descrizione e Analisi del problema**
- **Costruzione del modello**
- **Analisi del modello**
- **Selezione di “buone” soluzioni (simulazione e/o ottimizzazione)**
- **Validazione del modello**

Descrizione e Analisi del problema

La prima fase consiste nell'*analisi della struttura del problema* e nell'*individuazione dei dati necessari* per una descrizione per una corretta definizione del problema. Si tratta cioè di individuare i parametri di controllo e di individuare i legami logico-funzionali che definiscono il problema e lo/gli obiettivi.

Costruzione di un modello matematico

Nella fase di costruzione del modello matematico si deve fornire una descrizione formalizzata del problema di decisione facendo uso del linguaggio della matematica. Si dovrà cercare, quindi,

una corrispondenza tra relazioni del mondo reale (relazioni tecnologiche, leggi fisiche, vincoli di mercato, etc.) e relazioni matematiche (equazioni, disequazioni, dipendenze logiche, etc.).

$$\boxed{\text{relazioni del mondo reale}} \longleftrightarrow \boxed{\text{relazioni matematiche}}$$

La costruzione di un modello richiede valutazioni e scelte non facilmente codificabili in un procedimento standard. In particolare, per la costruzione di modelli soddisfacente è necessaria una conoscenza approfondita dell'applicazione d'interesse e dei metodi matematici di soluzione. La conoscenza dell'applicazione assicura che il modello sia soddisfacente e risponda alle domande concrete che l'utilizzatore gli porrà. La conoscenza dei metodi permette la definizione di modelli "risolvibili", cioè per i quali è possibile (al termine del processo di modellazione) la determinazione di soluzioni di buona "qualità".

È importante ribadire che un modello è definito per mezzo delle relazioni che lo costituiscono ed è quindi necessario che tali relazioni siano il più possibile indipendenti dai dati introdotti nel modello; questo perché uno stesso modello deve poter essere usato in differenti occasioni con dati (cioè costi, disponibilità di risorse, limiti tecnologici, etc.) diversi. Lo studio di questo aspetto, come già detto, rientra nella fase di analisi del modello sotto il nome di analisi della stabilità del modello rispetto ai dati introdotti.

In generale, la costruzione formale di un modello di Programmazione Matematica si può sintetizzare come segue:

1. Associare opportune *variabili di decisione* alle grandezze reali. Tali variabili costituiscono le incognite del problema.
2. Esprimere quantitativamente i *legami* esistenti tra le variabili e le *limitazioni* derivanti da considerazioni di carattere fisico, economico, etc. Tali legami e limitazioni definiscono i *vincoli*. L'insieme dei valori delle variabili per cui i vincoli sono soddisfatti costituisce l'*insieme ammissibile*.
3. Esprimere formalmente l'*obiettivo* che si intende minimizzare o massimizzare.

Analisi del modello matematico

Segue l'*analisi del modello* che prevede la deduzione per via analitica, in riferimento a determinate classi di problemi, di alcune importanti proprietà; le principali sono:

- *esistenza* della soluzione ottima;
- *condizioni di ottimalità*, cioè una caratterizzazione analitica della soluzione ottima;
- *stabilità* delle soluzioni al variare dei dati o di eventuali parametri presenti.

Lo studio delle condizioni di ottimalità ha sia motivazioni di natura teorica, sia motivazioni di natura algoritmica. Dal punto di vista teorico, una condizione di ottimalità può servire a

caratterizzare analiticamente le soluzioni di un problema di ottimo e quindi consentire di svolgere analisi *qualitative*, anche in assenza di soluzioni numeriche esplicite; un esempio è l'analisi della sensibilità delle soluzioni di un problema di ottimo rispetto a variazioni parametriche.

Selezione di “buona” soluzione

La successiva fase di *selezione di “buona” soluzione* corrisponde alla possibilità di determinare tra tutte le scelte possibili costituite dalle soluzioni ammissibili, quella ottima o una sua buona approssimazione.

I problemi di ottimizzazione che si presentano nella pratica sono di solito così complessi che non è possibile determinarne una soluzione per via analitica. La complessità è determinata innanzi tutto dal numero di variabili e di vincoli, che definiscono la *dimensione* del problema; e poi dalla eventuale presenza di funzioni non lineari tra le funzioni che definiscono l'obiettivo e/o i vincoli.

Se il modello è molto semplice può essere possibile risolvere le relazioni e utilizzare i dati a disposizione per determinare una soluzione analitica. La soluzione analitica è possibile solo nel caso di poche variabili e di funzioni estremamente semplici, e cioè solo nei casi che si utilizzano come esempi ed esercizi nei testi e sulla lavagna. Molto spesso, anche se esiste una soluzione analitica è estremamente complessa e la sua determinazione richiede molte risorse di calcolo; ad esempio invertire una matrice è un banale esempio per il quale esiste una formula analitica, ma che dal punto di vista numerico può per certe istanze non essere affatto banale. Quindi, nella pratica, per determinare una “buona” soluzione di un problema di ottimizzazione occorre fare ricorso all'uso del calcolatore.

I due aspetti più importanti e in qualche modo complementari nella ricerca Operativa dell'uso del calcolatore per la soluzione di un modello matematico sono la *simulazione* e l'*ottimizzazione*.

Il **processo di simulazione** utilizza un modello matematico che consente di visualizzare l'effetto di alcune decisioni sul sistema in esame senza che queste debbano essere realizzate effettivamente sul processo reale. La simulazione consiste quindi nella valutazione numerica delle funzioni che definiscono il modello per alcuni valori delle variabili di interesse allo scopo di verificare come influenzino alcune misure di performance dell'uscita. Molto spesso, i modelli per i quali si utilizza la simulazione includono qualche aspetto di natura stocastica e anche dinamica (di evoluzione nel tempo).

La simulazione può essere usata come strumento per l'ottimizzazione nel senso che colui che prende le decisioni può *procedere per tentativi* e scegliere la “migliore” tra varie alternative possibile. Il modello matematico implementato nel simulatore consente di valutare l'effetto delle sue decisioni sul sistema nel suo complesso. Questo tipo di approccio è detto *analisi di scenari*. L'analisi di scenari è particolarmente utile nel caso di sistemi estremamente complessi e per i quali una rappresentazione analitica di tutti i legami logico-funzionali può non essere possibile. La soluzione determinata tramite l'analisi di scenari possibili non ha però alcuna garanzia di essere quella ottima o una sua approssimazione. L'uso della simulazione come strumento di ottimizzazione può essere poco significativo sebbene estremamente flessibile; viceversa può avere un ruolo molto significativo nella successiva fase di *validazione* del modello in quanto consente di individuare imprecisioni e/o errori nel modello stesso.

Non si deve confondere quindi il ruolo di ottimizzazione e simulazione. Dato un modello, il **processo di ottimizzazione** consiste nella determinazione della soluzione ottima, se esiste, o almeno di una sua buona approssimazione. Nella pratica, per risolvere un problema di ottimizzazione occorre fare ricorso ad un *algoritmo iterativo*, cioè ad un programma di calcolo che, a partire da una approssimazione iniziale x^0 della soluzione, determina, con una appropriata se-

quenza di operazioni che definiscono una successione di valori $\{x^k\}$, una nuova approssimazione x^* . La possibilità di realizzazione di algoritmi è fortemente legata alla capacità di definire condizioni di ottimalità che caratterizzano la soluzione ottima di un certo modello.

L'analisi del modello matematico e la definizione di un algoritmo per la sua soluzione sono aspetti fortemente legati tra di loro.

Molto spesso software di ottimizzazione e di simulazione sono integrati con software statistico o con fogli elettronici (spreadsheets). La combinazione di simulazione e/o ottimizzazione con la “visualizzazione” dei risultati è una combinazione vincente. La visualizzazione rende l'uscita del processo di simulazione e/o di ottimizzazione molto più comprensibile e aggiunge spesso maggior credibilità al modello, soprattutto nei confronti di un pubblico non tecnico.

L'uso di fogli elettronici per la costruzione di modelli per l'uso di simulazione e di ottimizzazione sarà discusso in un capitolo successivo.

Validazione del modello

La soluzione numerica ottenuta al passo precedente deve poi essere valutata praticamente.

Questa fase di costruzione del modello non deve essere sottovalutata. I motivi di inattendibilità di un modello possono essere molti; in particolare la maggior difficoltà consiste nell'ottenere dati e/o informazioni validi. Spesso questo è legato al diverso linguaggio utilizzato dagli esperti del problema reale e dagli esperti di ottimizzazione. Informazioni essenziali sono spesso trascurate perché talmente scontate per l'esperto del problema da non dover essere raccontate. O viceversa modelli matematici troppo dettagliati possono produrre soluzioni incomprensibili.

La “validazione” del modello può avvenire attraverso una *verifica sperimentale* oppure con metodi di *simulazione*, allo scopo di ottenere, in questa fase di interazione con l'esperto, un modello matematico sempre più attendibile.

La definizione di un modello si configura quindi come un processo di raffinamento iterativo, che può essere schematizzato come rappresentato in Figura 1.1.

Figura 1.1: Fasi dell'approccio modellistico

Vantaggi dell'approccio modellistico

Esistono diverse ragioni per adottare l'approccio modellistico per la soluzione di problemi: si riassumono di seguito le principali.

- *Maggiore comprensione del problema.*
Il modello è una rappresentazione semplificata del problema e spesso la sua costruzione consente di individuare proprietà strutturali del problema che altrimenti non sarebbero affatto evidenti.
- *Possibilità di risolvere matematicamente il problema.*
Grazie al modello è possibile analizzare matematicamente il problema ed ottenere così una soluzione che, soprattutto in riferimento a scopi di pianificazione, permette di adottare strategie che da una sola analisi strutturale del problema non apparirebbero evidenti o che a volte potrebbero essere perfino controintuitive.
- *Deduzione analitica di importanti proprietà.*
Nella fase di analisi del modello è possibile dedurre per via analitica alcune importanti proprietà del problema sulla base dei risultati disponibili per la classe di problemi a cui si fa riferimento.

- *Possibilità di simulazioni.*

Con un modello è possibile effettuare esperimenti che spesso non è possibile effettuare direttamente nella realtà. La fase di simulazione è un passo fondamentale nella costruzione di un modello che può essere utilizzata per verificare l'effetto di una decisione, non necessariamente quella ottima, su un prototipo del sistema e non sul sistema stesso; ad esempio, l'uso di un modello consente di studiare gli effetti dell'adozione di una particolare misura economica in un paese senza la necessità di sperimentarla direttamente. Il decision maker ha uno strumento che gli consente di valutare l'effetto di una sua decisione senza essere necessariamente in grado di capire l'aspetto modellistico del problema.

Critiche all'approccio modellistico

Le principali critiche all'approccio modellistico possono essere sintetizzate nei seguenti due punti:

- Impossibilità di quantificare soddisfacentemente con opportuni valori numerici alcuni dati richiesti dal modello; questo accade, ad esempio, nel tentativo di quantificare con un costo o con un profitto alcuni valori sociali soprattutto in relazione a scopi di pianificazione.
- La qualità delle risposte che un modello produce potrebbero dipendere profondamente dall'accuratezza dei dati introdotti.

La qualità delle risposte fornite dal modello dipende dall'accuratezza della sua definizione: la fase di validazione è cruciale per valutare la soluzione numerica ottenuta e completare il modello introducendo elementi trascurati in una prima fase.

1.4 Un primo esempio di costruzione di un modello matematico

Come primo esempio di costruzione di un modello matematico analizziamo un semplice problema di pianificazione degli investimenti.

Esempio 1.4.1 – CAPITAL BUDGETING. *Supponiamo di dover investire £1000 sul mercato finanziario. Supponiamo inoltre che il mercato offra tre tipi diversi di investimenti **A**, **B**, **C** ciascuno caratterizzato da un prezzo d'acquisto e da un rendimento netto, che sono riassunti nella seguente tabella:*

	A	B	C
costo	750	200	800
rendimento	20	5	10

*Si vuole decidere quali degli investimenti effettuare per massimizzare il rendimento sapendo che gli investimenti **A**, **B**, **C** non si possono effettuare in modo parziale cioè non sono frazionabili.*

Analisi del problema e costruzione del modello.

Si tratta di un problema di pianificazione degli investimenti. Si devono definire formalmente le variabili di decisione, l'insieme delle soluzioni ammissibili e la funzione obiettivo.

– *Variabili di decisione.* In questo caso il decisore vuole semplicemente sapere, per ogni investimento, se tale investimento deve essere effettuato oppure no. Una scelta naturale delle variabili di decisione è la seguente:

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{non si effettua l'investimento } i\text{-esimo} \\ 1 & \text{si effettua l'investimento } i\text{-esimo} \end{cases} \quad i = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \quad (1.1)$$

– *Insieme ammissibile.* In base alla definizione delle variabili, le possibili scelte compatibili con il nostro budget sono:

- (0) non si effettuano investimenti $x_A = x_B = x_C = 0$
- (1) si effettua l'investimento **A**; $x_A = 1, x_B = x_C = 0$
- (2) si effettua l'investimento **B**; $x_A = 0, x_B = 1, x_C = 0$
- (3) si effettua l'investimento **C**; $x_A = x_B = 0, x_C = 1$
- (4) si effettuano gli investimenti **A** e **B**; $x_A = x_B = 1, x_C = 0$
- (5) si effettuano gli investimenti **B** e **C**; $x_A = 0, x_B = x_C = 1$.
- (6) si effettuano gli investimenti **A** e **C**; $x_A = 1, x_B = 0, x_C = 1$.
- (7) si effettuano gli investimenti **A**, **B** e **C**; $x_A = x_B = x_C = 1$.

Tra queste solo alcune sono compatibili con il nostro budget. In particolare, notiamo che le possibilità **A**, **C** e **A**, **B**, **C** non sono ammissibili in quanto il costo supera la nostra disponibilità, come si evince dalla Tabella 1.4.

L'insieme ammissibile oè costituito dalle scelte (0) – (5) ed è dato da:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si tratta quindi di un sottoinsieme dei vettori di \mathbb{R}^3 a componenti 0 – 1 ovvero

$$S \subseteq \{0, 1\}^3$$

– *Funzione obiettivo.* L'obiettivo che ci proponiamo è la massimizzazione del rendimento totale. Quindi dobbiamo esprimere la funzione obiettivo che corrisponde al rendimento netto relativo alla scelta di $x = (x_A, x_B, x_C)^T$ in S . È possibile ottenere la soluzione ottima valutando esaustivamente la funzione obiettivo per ogni elemento di S , ottenendo in relazione alle possibili scelte i valori riportati nella Tabella 1.4.

La soluzione ottima è ovviamente quella corrispondente alla scelta (4), cioè all'effettuare gli investimenti **A** e **B**, con valore della funzione obiettivo pari a £25.

Questa rappresentazione del problema ha alcuni difetti, in particolare:

1. *L'insieme ammissibile S è rappresentato in modo estensivo*, cioè elencando tutte le soluzioni ammissibili. In questo caso la cardinalità dell'insieme ammissibile è al più quella di $\{0, 1\}^3$ cioè 2^3 , ma in generale, se la dimensione del problema fosse più grande sarebbe impossibile valutare esaustivamente le soluzioni del problema. Se, ad esempio, il numero degli investimenti fosse stato 100 (che dal punto di vista delle applicazioni reali è del tutto verosimile) la cardinalità dell'insieme ammissibile sarebbe stata 2^{100} e per la

	Investimento							
	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
costi	0	750	200	800	950	1000	1550	1750
rendimento	0	20	5	10	25	15	30	35

Tabella 1.1: Tabella costi e rendimenti relativi a tutte le possibili combinazioni di investimento

valutazione di 2^{100} possibilità anche supponendo di utilizzare un calcolatore che effettui 10^{10} valutazioni al secondo (velocità superiore a quella raggiungibile dai calcolatori attuali) occorrerebbero 10^{20} secondi, cioè 3000 miliardi di anni !

2. *Il modello non è indipendente dai dati del problema*, cioè cambiando i dati del problema (prezzi e/o rendimenti) sarebbe necessario cambiare completamente il modello.

In genere si cerca di dare una *rappresentazione intensiva* dell'insieme ammissibile S , cioè individuare le proprietà $P(x)$ che consentono di distinguere le soluzioni ammissibili dagli elementi dell'insieme $\{0, 1\}^3$ che non lo sono. Si vuole quindi scrivere l'insieme S in una forma del tipo:

$$S = \{x \in \{0, 1\}^3 : \text{vale la proprietà } P(x)\}.$$

Nell'esempio, la proprietà distintiva degli elementi di S è il costo complessivo che non deve essere superiore a £1000. Possiamo esprimere matematicamente questa relazione come:

$$P(x) : 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000$$

e quindi l'insieme ammissibile si può scrivere

$$S = \{x = (x_A, x_B, x_C)^T \in \{0, 1\}^3 : 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000\}.$$

Anche la funzione obiettivo può essere scritta in forma più sintetica come:

$$f(x) = 20x_A + 5x_B + 10x_C.$$

In conclusione, il problema di decisione può essere posto nella forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & (20x_A + 5x_B + 10x_C) \\ & 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}. \end{aligned}$$

□