Capitolo 10

Teoria della Programmazione Lineare

In questo capitolo i risultati dei capitoli precedenti saranno applicati a problemi di Programmazione Lineare (PL).
Abbiamo già visto che l'insieme ammissibile di un problema di programmazione lineare è un poliedro e dunque un insieme convesso e che la PL è un problema sia concavo che convesso. Dunque, se ammette soluzione, il minimo globale (non necessariamente unico) si trova sulla frontiera dell'insieme ammissibile.

Ci proponiamo di studiare alcune proprietà dei poliedri che consentano di caratterizzare le soluzioni ottime di un problema di programmazione Lineare. Successivamente si deriva la teoria della dualità per la PL a partire dalle condizioni di KKT.

10.1 Caratterizzazione dei vertici di un poliedro

Passiamo ora a caratterizzare in modo algebrico i vertici di un poliedro in forma $Ax \geq b$.

Teorema 10.1.1 (Vertici di un poliedro) *Sia dato un poliedro $S = \{x \in R^n : \ Ax \geq b\}$. Un punto $\bar{x} \in S$ è un vertice se e solo se esistono n righe a_i^T della matrice A corrispondenti ai vincoli attivi in $\bar{x}$ linearmente indipendenti, cioè se e solo se risulta*

$$rango\{A_{I(\bar{x})}\} = n$$

dove $A_{I(\bar{x})}$ la matrice $|I(\bar{x})| \times n$ costituita dalle righe di A con indice in $I(\bar{x})$

Dimostrazione. Dimostriamo la parte necessaria, ovvero che se $\bar{x}$ è un vertice, allora rango$(\{a_i \, i \in I(\bar{x})\}) = n$. Per assurdo supponiamo che il rango sia $p < n$. Il sistema omogeneo

$$a_i^T d = 0 \quad i \in I(\bar{x})$$

in $I(\bar{x})$ equazioni e n incognite, ha rango inferiore a n e dunque ammette una soluzione non nulla. Dal teorema 6.12.3, sappiamo che d è una particolare direzione ammissibile; notiamo inoltre che, poiché anche $-d$ è soluzione del sistema omogeneo, anche $-d$ è una direzione ammissibile. Allora possiamo considerare i due punti

$$\begin{aligned} y &= \bar{x} + td \\ z &= \bar{x} + t(-d) \end{aligned}$$

e sappiamo che per valori di t sufficientemente piccoli sono entrambi ammissibili[1]. Osserviamo però che possiamo scrivere

$$\bar{x} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$$

ovvero $\bar{x}$ può essere ottenuto come combinazione convessa con coefficiente $\beta = \frac{1}{2}$ di due punti ammissibili e distinti. Ma questo contraddice che $\bar{x}$ sia un vertice.

Dimostriamo la parte sufficiente, ovvero che se rango$\{a_i \ i \in I(\bar{x})\} = n$ allora $\bar{x}$ è un vertice. Osserviamo preliminarmente che la condizione rango$(\{a_i \ i \in I(\bar{x})\}) = n$ implica che $\bar{x}$ sia l'unica soluzione del sistema

$$a_i^T x = b_i \quad \text{per ogni} \quad i \in I(\bar{x}).$$

Procediamo ora per assurdo e supponiamo che il punto $\bar{x}$ non sia un vertice. Allora non può essere l'unico punto ammissibile e in particolare esisteranno due punti ammissibili v e w distinti da $\bar{x}$ e tali che $\bar{x}$ possa essere espresso come combinazione convessa di v e w ovvero

$$\bar{x} = (1-\beta)v + \beta w \qquad \text{con } \beta \in (0,1).$$

Per ogni $i \in I(\bar{x})$ possiamo scrivere

$$b_i = a_i^T \bar{x} = (1-\beta)a_i^T v + \beta a_i^T w$$

Osserviamo che deve essere necessariamente $a_i^T v = b_i$ e $a_i^T w = b_i$ per ogni $i \in I(\bar{x})$. Se così non fosse, e $a_i^T v > b_i$ e/o $a_i^T w > b_i$ si avrebbe l'assurdo

$$b_i = a_i^T \bar{x} = (1-\beta)a_i^T v + \beta a_i^T w > (1-\beta)b_i + \beta b_i = b_i.$$

Ma allora otteniamo che sia v che w sono soluzioni del sistema

$$a_i^T x = b_i \quad \text{per ogni} \quad i \in I(\bar{x}).$$

Ma questo contraddice che $\bar{x}$ sia l'unica soluzione. □

Possiamo enunciare alcuni corollari che discendono direttamente dal teorema appena dimostrato.

Corollario 10.1.2 *Sia dato un poliedro $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq b\}$. Se la matrice A ha un numero di righe linearmente indipendenti minore di n, allora S non ha vertici.*
In particolare se $m < n$ allora S non ha vertici.

Corollario 10.1.3 *Un poliedro $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq b\}$ ha un numero finito di vertici, pari al massimo a*

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

[1]per trovare il valore di t basta applicare la formula (6.11) alle due direzioni d e $-d$.

Esempio 10.1.4 Sia dato il poliedro dell'Esempio 6.12.4

$$\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 \geq -30 \\ 2x_1 - x_2 \geq -12 \\ x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0 \end{array}$$

che possiamo scrivere in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -30 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Figura 10.1: Poliedro Esempio 10.1.4.

Il poliedro è rappresentato in figura 10.1 e i vertici sono indicati con un puntino rosso. Verifichiamo che la condizione espressa dal Teorema 10.1.1 è verificata. I tre vertici sono i punti

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

In v_1 sono attivi i vincoli $2x_1 - x_2 \geq -12,\ x_1 \geq 0$, ovvero $I(v_1) = \{2, 3\}$. Consideriamo le righe della matrice A corrispondenti

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che si verifica sono linearmente indipendenti.

In v_2 sono attivi i vincoli $3x_1 - 2x_2 \geq -30,\ x_1 \geq 0$, ovvero $I(v_1) = \{1,3\}$. Consideriamo le righe della matrice A corrispondenti

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che si verifica sono linearmente indipendenti.
In v_3 sono attivi i vincoli $2x_1 - x_2 \geq -12,\ 3x_1 - 2x_2 \geq -30$, ovvero $I(v_1) = \{1,2\}$. Consideriamo le righe della matrice A corrispondenti

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

che si verifica sono linearmente indipendenti. □

Si noti che il teorema 10.1.1 non esclude che in un vertice siano attivi più di n vincoli.

Esempio 10.1.5 Consideriamo il poliedro dell'Esempio 10.1.4 con l'aggiunta di un vincolo $x_2 \leq 24$, ovvero:

$$\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 \geq -30 \\ 2x_1 - x_2 \geq -12 \\ -x_2 \geq -24 \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Si verifica graficamente che il punto $v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}$ è ancora un vertice. Osserviamo che in v_3 sono ora attivi tre vincoli $I(v_3) = \{1,2,3\}$ e le righe della matrice A corrispondenti sono:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che il rango di questa matrice è 2. □

Esempio 10.1.6 Sia dato il poliedro

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \end{array}$$

elenchiamo i vertici. In forma matriciale possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Si ha $n = 3$ e $m = 4$. Il numero massimo di vertici è quindi $\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{4!}{3!} = 4$ e si ottengono considerando tutte le possibili combinazioni di tre righe della matrice A. consideriamo quindi i casi possibili:

1. $I = \{1, 2, 3\}$; il sistema $a_i^T x = b_i$ con $i \in I$ ha rango pari a 3 e l'unica soluzione è il punto $(1,\ 1,\ 0)^T$ che però non risulta ammissibile, perché risulta $(-4\ -1\ -2)(1,\ 1,\ 0)^T < -4$;
2. $I = \{1, 2, 4\}$ il rango della matrice è $2 < n$, quindi non può essere un vertice;
3. $I = \{2, 3, 4\}$ il sistema ammette l'unica soluzione $(3, 2\ , -5)$ che è ammissibile e quindi è un vertice;
4. $I = \{1, 3, 4\}$ il sistema ammette l'unica soluzione $(2, 2, -3)$ che è ammissibile e quindi è un vertice.

$\square$

Tuttavia bisogna porre attenzione al fatto che esistono poliedri *che non contengono vertici.* Un esempio e' dato nella figura 10.2 in cui il poliedro è la parte di piano contenuta tra due rette parallele r_1 e r_2.

Figura 10.2: Poliedro senza vertici.

Vedremo nel prossimo paragrafo che il caso in cui il poliedro non ha vertici è l'unico caso in cui il problema di PL corrispondente può avere soluzione ottima (ovviamente sulla frontiera) senza che nessuna soluzione coincida con un vertice.

Risulta quindi interessante capire quando un poliedro può non ammettere vertice. A tal scopo introduciamo la seguente definizione

Definizione 10.1.7 (Retta) *Sia S un poliedro. Il poliedro contiene una retta se esiste un punto $\bar{x} \in S$ e una direzione $d \in \mathbb{R}^n$ tale che*

$$\bar{x} + td \in S \quad \text{per ogni} \quad t \in \mathbb{R}.$$

La caratterizzazione dei casi in cui un poliedro non ammette vertici è riportata nel seguente risultato, di cui omettiamo la prova.

Teorema 10.1.8 *Un poliedro P non vuoto non ha vertici se e solo se contiene una retta.*

È evidente che il poliedro nella Figura 10.2 contiene rette (in particolare contiene, per esempio, r_1, r_2) e quindi, non contiene vertici.

Osservazione 10.1.9 *Nel caso le variabili del problema di PL siano vincolate ad essere tutte non negative ovvero tra i vincoli compaiono $x \geq 0$, questo implica che il poliedro ammissibile è interamente contenuta nel primo ortante e quindi* non può contenere rette. *Quindi, in base al teorema precedente, tutti i poliedri contenuti nel primo ortante o sono vuoti o hanno dei vertici.*

Notiamo che questa è sicuramente la classe di poliedri che più frequentemente si incontra nelle applicazioni.Possiamo dunque affermare:

Se un poliedro

$$S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \; x \geq 0\}$$

è non vuoto, ammette sempre almeno un vertice.

Dumque, risulta vero il seguente risultato.

Corollario 10.1.10 *Sia dato un poliedro del tipo $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = b, \; x \geq 0\}$. Se il poliedro non è vuoto, ammette sempre un vertice.*

Consideriamo un poliedro n forma standard del tipo

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = b, \; x \geq 0\}.$$

Possiamo caratterizzare i vertici di un poliedro in forma standard utilizzando la struttura particolare e osservando che in punto ammissibile $\bar{x}$ risulta

$$I(\bar{x}) = \{1, \dots, m\} \cup \{i : \; \bar{x}_i = 0\}.$$

Vale il seguente teorema che si riporta senza dimostrazione.

Teorema 10.1.11 (Vertici di un poliedro in forma standard) *Sia dato un poliedro $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = b, \; x \geq 0\}$. Un punto $\bar{x} \in S$ è un vertice se e solo se le colonne della matrice A corrispondenti a componenti positive di $\bar{x}$, sono linearmente indipendenti.*

Abbiamo osservato nel Capitolo 3 che è possibile passare da una rappresentazione di un poliedro ad altre equivalenti. In particolare ci interessa qui notare che un poliedro del tipo

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \geq b, \; x \geq 0\}$$

(con A matrice $m \times n$) può essere trasformato in forma standard con l'aggiunta di variabili di surplus come segue

$$S' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} : \ Ax - s = b, \ x \geq 0, \ s \geq 0 \right\}.$$

Possiamo mettere in relazione i vertici di S con i vertici di S'. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 10.1.12 *$\bar{x}$ è un vertice del poliedro $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq b, \ x \geq 0\}$ se e solo se $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{s} \end{pmatrix}$ con $\bar{s} = A\bar{x} - b$ è un vertice di $S' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} : \ Ax - s = b, \ x \geq 0, \ s \geq 0 \right\}$.*

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che $\bar{x} \in S$ se e solo se $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ A\bar{x} - b \end{pmatrix} \in S'$. Infatti per definizione $A\bar{x} - b = \bar{s} \geq 0$.

Supponiamo che $\bar{x}$ sia un vertice di S ma per assurdo $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{s} \end{pmatrix}$ non sia vertice di S'. Dunque esistono altri due punti distinti $\begin{pmatrix} x^1 \\ s^1 \end{pmatrix} \in S'$ e $\begin{pmatrix} x^2 \\ s^2 \end{pmatrix} \in S'$ tali che

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{s} \end{pmatrix} = (1-\beta) \begin{pmatrix} x^1 \\ s^1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x^2 \\ s^2 \end{pmatrix} \in S' \quad \text{per qualche } \beta \in (0,1)$$

e

$$Ax^1 - s^1 = b, \ Ax^2 - s^2 = b, \ x^1 \geq 0, \ s^1 \geq 0, \ x^2 \geq 0, \ s^2 \geq 0.$$

Dunque $x^1 \in S$ e $x^2 \in S$. Inoltre $x^1 \neq x^2$ altrimenti $s^1 = Ax^1 - b = Ax^2 - b = s^2$ e dunque i due punti $\begin{pmatrix} x^1 \\ s^1 \end{pmatrix} \in S'$ e $\begin{pmatrix} x^2 \\ s^2 \end{pmatrix} \in S'$ non sarebbero distinti. Ma allora risulta anche $\bar{x} = (1-\beta)x^1 + \beta x^2$ che contraddice l'ipotesi che $\bar{x}$ sia un vertice.

Supponiamo ora $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ A\bar{x} - b \end{pmatrix} \in S'$ sia un vertice di S', ma, per assurdo, $\bar{x}$ NON sia vertice di S. Allora esistono due punti $x^1, x^2 \in S$ tali che

$$\bar{x} = (1-\beta)x^1 + \beta x^2 \quad \text{per qualche } \beta \in (0,1).$$

Siano $s^1 = Ax^1 - b \geq 0$ e $s^2 = Ax^2 - b \geq 0$, dunque $\begin{pmatrix} x^1 \\ s^1 \end{pmatrix} \in S'$ e $\begin{pmatrix} x^2 \\ s^2 \end{pmatrix} \in S'$. Inoltre si ha

$$(1-\beta)s^1 + \beta s^2 = (1-\beta)(Ax^1 - b) + \beta(Ax^2 - b) = A\left((1-\beta)x^1 + \beta x^2\right) - b = A\bar{x} - b = \bar{s}$$

che contraddice l'ipotesi che $(\bar{x}, \ \bar{s})^T$ sia un vertice di S'. $\square$

10.2 Il teorema fondamentale della PL

Consideriamo ora il problema di Programmazione Lineare

$$\min_{x \in S} c^T x$$

con S poliedro. È da notare che il caso di problemi con soli vincoli di uguaglianza del tipo

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b \end{array}$$

con A matrice $m \times n$ é di scarsa rilevanza pratica in quanto è possibile dimostrare che se esiste una soluzione ammissibile e il problema non è illimitato allora *tutte* le soluzioni ammissibili sono ottime. Quindi il problema con soli vincoli di uguaglianza, si riduce essenzialmente allo studio di sistemi di equazioni lineari.
In particolare vale il seguente risultato.

Teorema 10.2.1 *Sia dato il problema di PL*

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b \end{array}$$

con A matrice $m \times n$. Se esiste un punto $\bar{x}$ tale che $A\bar{x} = b$ allora

1. *il problema è illimitato inferiormente (in questo caso esiste un direzione d ammissibile tale che $c^T d < 0$)*

   oppure

2. *tutte le soluzioni ammissibili sono ottime (in questo caso per ogni direzione d ammissibile risulta $c^T d = 0$)*

Dimostrazione. Se $\bar{x}$ è soluzione unica del sistema $Ax = b$, allora banalmente è anche ottima (e non esiste alcuna direzione $d \neq$ ammissibile perché il sistema $Ad = 0$ non ammette soluzione non nulla). Supponiamo quindi che $\bar{x}$ non sia l'unico punto ammissibile, allora per ogni d tale che $Ad = 0$, le direzione $\pm d$ sono ammissibili e risulta $A(\bar{x} \pm td) = b$ per ogni $t > 0$.
Se per ogni d ammissibile risulta $c^T d = 0$ allora possiamo scrivere

$$c^T(\bar{x} + td) = c^T \bar{x},$$

cioè tutte le soluzioni ammissibili hanno lo stesso valore della funzione obiettivo.
Se invece esiste una d ammissibile per cui $c^T d \neq 0$, possiamo senza perdere di generalità supporre che sia $c^T d < 0$ (altrimenti sarebbe sufficiente considerare la direzione $-d$). La direzione d è di discesa e possiamo scrivere

$$c^T(\bar{x} + td) = c^T \bar{x} + tc^T d = c^T \bar{x} - t|c^T d|.$$

Al tendere di t ad ∞ di ha $c^T(\bar{x} + td) \to -\infty$. □
Nel seguito quindi faremo riferimento solo a problemi di Programmazione Lineare con vincoli di disuguaglianza e senza perdere di generalitá considereremo solo problemi del tipo

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b \end{array} \tag{10.1}$$

Si tratta quindi di stabilire se un problema di PL ammette soluzione e come caratterizzare la soluzione ottima.
Abbiamo già dimostrato con i Teoremi 5.3.5 e 5.3.6 che *se esiste* una soluzione ottima, allora si trova sulla frontiera del poliedro. Il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare caratterizza in modo più completo i problemi di Programmazione Lineare.

Teorema 10.2.2 (Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare) *Sia dato un problema di PL. Allora una e una sola delle seguenti affermazioni è vera:*

1. *La regione ammissibile è vuota;*
2. *Il problema è illimitato;*
3. *Il problema ammette soluzioni ottime.*

Se il problema ammette soluzioni ottime e il poliedro che definisce la regione ammissibile ha dei vertici, allora almeno una soluzione ottima cade su un vertice.

Nella dimostrazione del teorema fondamentale della PL, faremo riferimento a problemi di PL in forma (10.1) ed useremo l'ipotesi (solo semplificativa della dimostrazione) che il poliedro non contenga rette, che, in base al Teorema 10.1.8, ci assicura l'esistenza di almeno un vertice del poliedro.

Teorema 10.2.3 (Teorema fondamentale della PL) *Sia dato il problema di PL in forma (10.1). Supponiamo che il poliedro $S = \{x \in R^n : \ Ax \geq b\}$ non contenga rette. Allora è vera una e una sola delle delle seguenti tre affermazioni.*

(a) *Il problema non ammette soluzioni ammissibili (la regione ammissibile è vuota).*

(b) *Il problema è illimitato inferiormente sulla regione ammissibile.*

(c) *Esiste almeno una soluzione ottima e almeno una di esse è un vertice del poliedro.*

Dimostrazione. Ovviamente le tre affermazioni dell'enunciato sono incompatibili, nel senso che se è vera una, non possono essere vere le altre due. Quindi, per dimostrare il teorema, basterà mostrare che non può succedere che non si verifichi nessuna delle tre. Mostreremo questo facendo vedere che se non sono vere né (a) né (b), allora deve essere vera la (c).

Supponiamo quindi che la regione ammissibile sia non vuota e che il problema non sia illimitato inferiormente. Si tratta quindi di dimostrare che esiste un vertice v^* tale che $c^T v^* \leq c^T x$ per ogni x ammissibile.
Se il poliedro contiene solo un punto v^* allora v^* è ovviamente la soluzione ottima ed è anche un vertice. Supponiamo allora che il poliedro contenga più di un punto (e quindi infiniti).

La dimostrazione prosegue in due parti. Nella prima parte dimostriamo la seguente affermazione

Per ogni punto $\tilde{x} \in S$, esiste un vertice v^k tale che $c^T v^k \leq c^T \tilde{x}$.

La seconda parte utilizza invece risultati già noti. In particolare, dal Teorema 10.1.3, sappiamo che i vertici del poliedro sono in numero finito; li indichiamo con $v^1, \dots v^p$. Quindi tra tutti i vertici v^i possiamo scegliere quello per cui il valore della funzione obiettivo è minore, che indichiamo con v^*. Risulta quindi $c^T v^* \leq c^T v^i$ per ogni vertice v^i e quindi in particolare possiamo scrivere anche per il vertice v^k determinato nel prima parte

$$c^T v^* \leq c^T v^k$$

Mettendo insieme le due affermazioni in rosso, possiamo finalmente scrivere

$$c^T v^* \leq c^T v^k \leq c^T \tilde{x}, \quad \text{per ogni } \tilde{x} \in S$$

il che prova che l'affermazione (c) è vera.
Dimostriamo la prima parte. Sia $\tilde{x}$ una soluzione ammissibile che non sia un vertice, dimostriamo che è possibile trovare un vertice v tale che $c^T v \leq c^T \tilde{x}$. La dimostrazione è costruttiva. Poiché $\tilde{x}$ non è un vertice, per il Teorema 10.1.1, il sistema

$$a_i^T d = 0, \qquad i \in I(\tilde{x})$$

non ha rango massimo e quindi ammette una soluzione $\bar{d}$ non nulla. Dunque, per il Corollario 6.12.5, $\pm\bar{d}$ sono direzioni ammissibili e i punti $\tilde{x}+t\bar{d}$ con $t \in [0, t^+_{\max}]$ e $\tilde{x}-t\bar{d}$ con $t \in [0, t^-_{\max}]$ sono ammissibili. Si dimostra ora che $\min\{t^+_{\max}, t^-_{\max}\} < \infty$, cioè che lo spostamento ammissibile lungo almeno una delle due direzioni $\pm\bar{d}$ è finito.
A questo scopo, scegliamo la direzione $\bar{d}$ tale $c^T\bar{d} \leq 0$ e dunque è possibile una delle due condizioni:

(i) $c^T\bar{d} = 0$;

(ii) $c^T\bar{d} < 0$.

Se $c^T\bar{d} = 0$ ovviamente anche $c^T(-\bar{d}) = 0$. Poiché il poliedro non contiene rette deve risultare che almeno uno tra $t^+_{\max}$ e $t^-_{\max}$ è $< \infty$. Senza perdita di generalità possiamo assumere che sia $t^+_{\max} < \infty$.
Se invece $c^T\bar{d} < 0$, la direzione $\bar{d}$ risulta dunque essere una direzione di discesa (vedi paragrafo 6.2) e per ogni $t > 0$ risulta

$$c^T(\tilde{x} + td) = c^T\tilde{x} + tc^T d = c^T\tilde{x} - t|c^T d| \qquad \text{per ogni } t > 0.$$

Supponiamo che t possa $\to \infty$. Si ottiene

$$\lim_{t\to\infty} c^T(\tilde{x} + td) = c^T\tilde{x} - |c^T d| \lim_{t\to\infty} t = -\infty.$$

Poiché per ipotesi **il problema non è illimitato**, questo non si può verificare, dunque $t \not\to \infty$ e **necessariamente** $t^+_{\max} < \infty$.
In entrambi i casi otteniamo che $\tilde{x} + t\bar{d}$ è ammissibile per $0 \leq t \leq t^+_{\max} < \infty$.
Definiamo il punto

$$y = \tilde{x} + t^+_{\max}\bar{d};$$

ricordando che $c^T\bar{d} \leq 0$ risulta

$$c^T y = c^T\tilde{x} - t^+_{\max}|c^T d| \leq c^T\tilde{x}.$$

Verifichiamo quali vincoli sono attivi in y. Ricordando che per $i \in I(\tilde{x})$ risulta $a_i^T\bar{d} = 0$, otteniamo

$$a_i^T y = a_i^T(\tilde{x} + t^+_{\max}\bar{d}) = a_i^T\tilde{x} = b_i \qquad i \in I(\tilde{x})$$

Quindi $I(\tilde{x}) \subseteq I(y)$. Facciamo ora vedere che $I(\tilde{x}) \subset I(y)$, ovvero che in y è attivo almeno un vincolo in più rispetto ad $\tilde{x}$. Consideriamo quindi i vincoli NON attivi in $\tilde{x}$ e si indichi con $j_{\max} \notin I(\tilde{x})$ un indice per cui:

$$t^+_{\max} = \frac{a^T_{j_{\max}}\tilde{x} - b_{j_{\max}}}{|a^T_{j_{\max}}\bar{d}|}$$

(cioè un indice per cui è raggiunto il minimo nella formula (6.12)). Per definizione risulta che l'indice $j_{\max} \notin I(\tilde{x})$ e $a^T_{j_{\max}} \bar{d} < 0$. Possiamo allora scrivere:

$$a^T_{j_{\max}} x = a^T_{j_{\max}} \tilde{x} + t^+_{\max} a^T_{j_{\max}} \bar{d} = a^T_{j_{\max}} \tilde{x} - t^+_{\max} |a^T_{j_{\max}} d| = a^T_{j_{\max}} \tilde{x} - \frac{a^T_{j_{\max}} \tilde{x} - b_{j_{\max}}}{|a^T_{j_{\max}} \bar{d}|} |a^T_{j_{\max}} \bar{d}| = b_{j_{\max}}$$

Quindi abbiamo che $I(y) \supseteq I(\tilde{x}) \cup \{j_{\max}\}$, cioè in y è attivo almeno un vincolo che non era attivo in $\tilde{x}$. Osserviamo che potrebbe esistere più di un indice per cui è raggiunto il minimo nella formula (6.12). In questo caso avrei attivi in y tanti vincoli in più rispetto a $\tilde{x}$ quanti sono tali indici. Abbiamo quindi dimostrato che, a partire da un qualunque punto ammissibile $\tilde{x}$ che non è un vertice, possiamo determinare un nuovo punto y con valore della funzione obiettivo non superiore e con un numero di vincoli attivi linearmente indipendenti maggiore rispetto a $\tilde{x}$. Se y non è un vertice, possiamo ripetere lo stesso procedimento fino a quando non troviamo un punto in cui sono attivi n vincoli linearmente indipendenti, cioè un vertice. Quindi abbiamo dimostrato l'affermazione che ci serviva:

Per ogni punto $x \in S$, esiste un vertice v tale che $c^T v \leq c^T x$.

La dimostrazione è conclusa. $\square$

Illustriamo con un esempio la tecnica costruttiva utilizzata nella dimostrazione del teorema precedente.

Esempio 10.2.4 Consideriamo il problema di PL

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_1 - x_2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \geq -30 \\ & 2x_1 - x_2 \geq -12 \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

il cui poliedro è riportato in Figura 10.3.

Il poliedro ha tre vertici che abbiamo già calcolato nell'Esempio 10.1.4, che indichiamo con v^1, v^2, v^3 (puntini rossi in figura). Sia $x = (3,\ 0)$ un punto ammissibile (puntino blu in figura). Si verifica facilmente che $\tilde{x}$ non è un vertice. Infatti $I(\tilde{x}) = \{4\}$ (è attivo solo il vincolo $x_2 \geq 0$) e risulta ovviamente rango$\{a_i\ i \in I(\bar{x})\} = 1 < n = 2$. Consideriamo allora il sistema omogeneo

$$a_4^T d = 0 \qquad \text{ovvero} \quad d_2 = 0.$$

Quindi una qualunque direzione del tipo $(d_1,\ 0)^T$ con $d_1 \neq 0$ è ammissibile in $\tilde{x}$. Sia $\bar{d} = (-1,\ 0)$ una possibile soluzione (indicata in azzurro in Figura 10.3). Risulta $c^T \bar{d} = 4d_1 = -4 < 0$ e si consideri il punto

$$\tilde{x} + t\bar{d} = (3,\ 0)^T + t(-1,\ 0)^T = (3 - t,\ 0)^T.$$

Calcoliamo il valore di

$$t^+_{\max} = \min\left\{\frac{9+30}{3}, \frac{6+12}{2}, \frac{3}{1}\right\} = \min\{13, 9, 3\} = 3.$$

Figura 10.3: Figura relativa all'Esempio 10.2.4.

Si osservi in Figura 10.3 che i valori 13,9,3 che compaiono dentro il min per il calcolo di $t^+_{\max}$ corrispondono rispettivamente al valore del passo t per cui il punto $\tilde{x} + t\bar{d}$ "sfonda" rispettivamente il primo, il secondo e il terzo vincolo. Il valore di $t^+_{\max} = 3$ corrisponde al massimo valore del passo t per cui il punto rimane ammissibile. Sia allora

$$y = \tilde{x} + t^+_{\max}\bar{d} = (0,\ 0)^T$$

Risulta $I(y) = \{3, 4\} = I(\tilde{x}) \cup \{3\}$. Inoltre la riga a_3 è linearmente indipendente da a_4. Si tratta del vertice v^1. $\square$

Consideriamo in questo paragrafo i problemi di PL in forma standard, ovvero del tipo:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array} \qquad (10.2)$$

Nel caso di problemi di PL in forma standard, ricordando che in questo caso il poliedro ammissibile non contiene rette, possiamo enunciare il teorema fondamentale come segue:

Teorema 10.2.5 (Teorema fondamentale della PL) *Sia dato il problema di PL in forma*

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Allora è vera una e una sola delle delle seguenti tre affermazioni.

(a) *Il problema non ammette soluzioni ammissibili (la regione ammissibile è vuota).*

(b) *Il problema è illimitato inferiormente sulla regione ammissibile.*

(c) *Esiste almeno una soluzione ottima e almeno una di esse è un vertice del poliedro.*

10.3 Cenni sul metodo del simplesso per la Programmazione Lineare

Il Metodo del Simplesso è certamente l'algoritmo di ottimizzazione più famoso e più utilizzato nelle applicazioni. Proposto nel 1947 da G.B.Dantzig, ha subito, negli oltre 50 anni di vita, numerosi miglioramenti che, pur non modificando in modo sostanziale la semplice struttura logica ideata da Dantzig, ne hanno certamente migliorato l'efficienza computazionale e la facilità di uso. Esistono oggi numerosi "package" commerciali che implementano il Metodo del Simplesso e consentono la soluzione di problemi di Programmazione Lineare con milioni di variabili.

Lo scopo di questo capitolo è quello di fornire una descrizione della struttura logica del Metodo senza entrare nei dettagli implementativi delle varie operazioni elementari (inversioni di matrici sparse, gestione dei passi degeneri, etc.) delle quali il Metodo si compone. Tali questioni sono molto rilevanti se si vuole realizzare un algoritmo efficiente e robusto ma possono essere trascurate se si vuole semplicemnete sesere in grado di interpretare l'output di un qualunque software che implementa tale metodo (vedi anche il capitolo 12).

Il Metodo del Simplesso si applica a problemi di Programmazione Lineare in *forma standard* del tipo:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{10.3}$$

con $b \geq 0$. Non vi è perdita di generalità nell'assumere che il problema sia nella forma standard (10.3).

L'obiettivo del metodo del simplesso è quello di individuare un *vertice* ottimo del problema (10.3) ovvero un vertice ottimo del poliedro

$$P = \{x \in I\!R^n : Ax = b, \quad x \geq 0_n\}.$$

L'idea di cercare la soluzione ottima in un vertice della regione ammissibile trova giustificazione nei risultati dei capitoli precedenti e, in particolare, nel Teorema 10.2.3.

L'individuazione di tale vertice ottimo viene effettuata per iterazioni successive sfruttando la particolare struttura del poliedro ammissibile.

In particolare, descriveremo brevemente una implementazione del Metodo del Simplesso, detta implementazione in *due fasi*: *Fase I* e *Fase II*.

La Fase I consiste nello stabilire se il problema di PL è compatibile e, se lo è, consente di individuare un vertice iniziale. In base al Teorema 10.1.8 che garantisce l'esistenza di un vertice di un poliedro nella forma in (10.3), se il problema non possiede un vertice allora il poliedro P è vuoto ed il problema è inammissibile. In tal caso la Fase I termina segnalando l'inammissibilità del problema.

In sintesi, la Fase I consiste in

- verifica dell'ammissibilitá;
- eliminazione di eventuali vincoli ridondanti cosí che risulti rango$(A) = m$;
- individuazione di un vertice ammissibile.

A partire da questa prima soluzione, il metodo del simplesso (Fase II) produce degli spostamenti lungo gli spigoli del poliedro ammissibile, in modo da passare da un vertice ad un altro adiacente non aumentando il valore della funzione obiettivo fino a trovare una soluzione ottima del problema (P) oppure a concludere che il problema è illimitato (inferiormente).

La *Fase II* del Metodo del Simplesso suppone di avere un problema di tipo (10.3) in cui rango$(A) = m$ e di conoscere un primo vertice ammissibile. L'algoritmo costruisce una sequenza di soluzioni ammissibili (vertici), verificando, ad ogni iterazione, l'ottimalità del vertice corrente e l'illimitatezza del problema utilizzando opportuni criteri.

È caratterizzata dalle seguenti operazioni:

1. certificazione dell'ottimalità del vertice corrente;
2. certificazione dell'illimitatezza del problema;
3. costruzione di una nuovo vertice (ove possibile).

Sotto opportune condizioni, l'algoritmo del Simplesso converge in un numero finito di iterazioni alla soluzione ottima del problema 10.3, oppure certifica che tale soluzione non esiste.

Il motivo del successo computazionale del simplesso sta nelle modalitá con cui le operazioni necessarie nella Fase I e Fase II possono essere effettuate.

L'algoritmo utilizzato nella Fase II può essere anche utilizzato per risolvere la Fase I, cioè per la determinazione di un primo vertice; riportiamo preliminarmente una breve descrizione dei soli concetti utili alla comprensione dell'informazione contenuta negli output dei software commerciali, partendo dalla Fase II del metodo del simplesso (per maggiori dettagli si veda [**?**]). La Fase I sarà descritta successivamente.

10.3.1 Soluzione di Base Ammissibile (SBA) e problema ridotto

Una sottomatrice B $(m \times m)$ di A si dice *matrice di base* di A se è non singolare. Data una matrice di base B, è sempre possibile, eventualmente riordinando le colonne, esprimere la matrice A nella forma $A = (B,\ N)$ dove N è la matrice definita dalle colonne fuori base. Analogamente si possono partizionare i vettori

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$$

le variabili x_B si dicono *variabili di base* e le variabili x_N *variabili fuori base*. Quindi si può riscrivere il problema in forma standard come segue:

$$\begin{aligned}&\min c_B^T x_B + c_N^T x_N\\ &Bx_B + Nx_N = b\\ &x_B \geq 0,\\ &x_N \geq 0\end{aligned}$$

Poiché B è non singolare per ipotesi, possiamo esprimere le variabili di base x_B in funzione delle variabili x_N e si ottiene

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \tag{10.4}$$

Sostituendo si può scrivere il problema nelle sole variabili x_N ottenuto per proiezione delle variabili x_B nel sottospazio delle variabili x_N.

Si chiama *problema ridotto* il problema equalente al problema (10.3) nelle sole variabili x_N

$$\begin{aligned}\min \quad & c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N\\ & B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \geq 0_m,\\ & x_N \geq 0\end{aligned} \tag{10.5}$$

In particolare, risulta ovvio verificare quanto segue. Un vettore $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_B \\ \hat{x}_N \end{pmatrix}$ è una soluzione ammissibile di (10.3) se e solo se il vettore $\hat{x}_N$ è una soluzione ammissibile di (10.5) e $\hat{x}_B = B^{-1}b - B^{-1}N\hat{x}_N$. Inoltre, il valore della funzione obiettivo del problema (10.3) calcolata in $\hat{x}$ è uguale al valore della funzione obiettivo del problema ridotto calcolata in $\hat{x}_N$.

Data una base B, una soluzione del tipo $x_B = B^{-1}b$, $x_N = 0$ si dice *Soluzione Ammissibile di Base* (SBA) se e solo se $B^{-1}b \geq 0$.

Le SBA ed i vertici di un poliedro in forma standard sono in stretta relazione. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 10.3.1 [?] *Dato un poliedro in forma standard, un punto $\bar{x}$ è un vertice se e solo se è una SBA.*

Di conseguenza, se $\bar{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$ è la soluzione di base ammissibile associata alla matrice B, abbiamo che $\bar{x}_N = 0_{n-m}$ è la soluzione corrispondente del problema ridotto e che $c^T B^{-1}b$ è il valore della funzione obiettivo per entrambi i problemi.

L'associazione (vertice - base) non è univoca, nel senso che data una base ad essa è associata una soluzione di Base, ma ad una soluzione di base ammissibile, cioè a un vertice, può essere associata più di una base.

A titolo di esempio si consideri il seguente caso:

Esercizio 10.3.2 *Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)*

$$
\begin{aligned}
&-x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq 10\\
&-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\\
&x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

si verifichi che il punto $\bar{x} = (0,\ 2,\ 0,\ 0)^T$ *è un vertice del poliedro posto in forma standard per il metodo del simplesso. Si scriva la base* B *corrisponente.*

Soluzione. Il problema in forma standard è

$$
\begin{aligned}
&-x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 10\\
&-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\\
&x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Utilizziamo la caratterizzazione del teorema 10.1.1, abbiamo che in $\bar{x}$ l'unica componente positiva è x_2 e la colonna $A_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ è linearmente indipendente, dunque $\bar{x}$ è un vertice e dunque una SBA. Osserviamo però che il numero di componenti di $\bar{x}$ diverse da zero è inferiore a $m = 2$. Dunque la matrice di base 2×2 associata a $\bar{x}$ non è unica. In particolare sono basi le matrici

$$
B^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}
$$

cioè alle variabili $x_{B^{(1)}} = (x_1,\ x_2)^T$, $x_{B^{(2)}} = (x_2,\ x_3)^T$, $x_{B^{(3)}} = (x_2,\ x_4)^T$

$\square$

I coefficienti di x_N nella funzione obiettivo del problema ridotto sono le componenti del vettore γ definito da:

$$
\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N
$$

che è detto *vettore dei coefficienti ridotti.*

Le considerazioni appena svolte ci consentono di formulare un *criterio sufficiente di ottimalità* per una soluzione di base ammissibile.

Teorema **10.3.3 (Criterio di Ottimalità)** *Sia* $\bar{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$, *una soluzione di base ammissibile per il problema (10.3).* Se *il vettore dei coefficienti ridotti è non negativo, ovvero* se*:*

$$
c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0_{n-m}^T,
$$

allora la soluzione di base ammissibile $\bar{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$ è ottima *per il problema (10.3).*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che, se il vettore dei coefficienti ridotti è non negativo, risulta

$$
c^T x \geq c^T \bar{x}
$$

per una qualunque soluzione ammissibile x. Calcoliamo $c^T\bar{x} = c_B^T\bar{x}_B + c_N^T\bar{x}_N = c_B^T\bar{x}_B = c_B^T B^{-1}b$. Una qualunque soluzione ammissibile x del problema (10.3) può essere suddivisa in $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$. Allora risulta che $c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$ e ricordando l'espressione (10.4) di x_B

$$c^T x = c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N$$

D'altra parte, per ipotesi $\gamma \geq 0$ e x è ammissibile e quindi, in particolare, $x_N \geq 0$, quindi si ha:

$$c^T x \geq c_B^T B^{-1} b = c^T \bar{x}.$$

Ma la precedente relazione mostra che la soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ associata alla matrice di base B è ottima per il problema (10.3). □

Il criterio di ottimalità è in generale un criterio solo sufficiente.

Esercizio 10.3.4 *Sia dato il problema di PL in forma standard*

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 3x_2 + x_3 \\ & x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 = 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

Le soluzioni di Base ammissibili (SBA) sono

1. $x_1 = x_2 = 0$ *(non ammissibile)*
2. $x_1 = x_3 = 0$ *(non ammissibile)*
3. $x_1 = x_4 = 0$ *(non ammissibile)*
4. $x_2 = x_3 = 0,\ x_1 = 6, x_4 = 10$ *(SBA)*
5. $x_2 = x_4 = 0,\ x_1 = 1, x_3 = \frac{5}{2}$ *(SBA)*
6. $x_3 = x_4 = 0,\ x_1 = \frac{4}{9}\ x_2 = \frac{10}{9}$ *(SBA).*

Consideriamo la SBA $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$*; le variabili di base* $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$*, le variabili fuori base* $x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$*; la matrice di base* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$*. I coefficienti di costo ridotto* $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ *richiede il calcolo dell'inversa* $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$*. Dunque sostituendo si ottiene*

$$\gamma^T = (\,3 \quad 1\,) - (\,1 \quad 0\,) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\,-2 \quad -1\,) \not\geq 0,$$

dunque non è possibile concludere nulla sulla ottimlità della soluzione.

Esercizio 10.3.5 *Sia dato il problema di Programmazione lineare (P) dell'Esercizio 10.3.2*

$$\begin{array}{ll} \min & 10x_2 + 6x_3 \\ & -x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 10 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

e sia $\bar{x} = (0,\ 2,\ 0,\ 0)^T$ *una vertice ottimo a cui corrispondono le tre matrici di base*

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si verifichi se è soddisfatto il criterio di ottimalità in corrispondenza a ciascuna base.

Soluzione. Si tratta di calcolare il vettore γ i corrispondenza alle tre basi diverse.

$$(B^{(1)})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \quad x_{B^{(1)}} = (x_1\ x_2)^T$$

$$\begin{aligned} (\gamma^{(1)})^T = \ & c^T_{N^{(1)}} - c^T_{B^{(1)}}(B^{(1)})^{-1}N^{(1)} = (0\ \ 10) - \tfrac{1}{3}(6\ \ 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ & = (2\ \ 14) > 0 \end{aligned}$$

$$(B^{(2)})^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad x_{B^{(2)}} = (x_2\ x_3)^T$$

$$(\gamma^{(2)})^T = \ c^T_{N^{(2)}} - c^T_{B^{(2)}}(B^{(2)})^{-1}N^{(2)} = (10\ \ 6) - (0\ \ 0)(B^{(2)})^{-1}N^{(2)} = (10\ \ 6) > 0$$

$$(B^{(3)})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad x_{B^{(3)}} = (x_2\ x_4)^T$$

$$(\gamma^{(3)})^T = \ c^T_{N^{(3)}} - c^T_{B^{(3)}}(B^{(3)})^{-1}N^{(3)} = (10\ \ 0) - (0\ \ 6)\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (19 \quad -57) \not\geq 0$$

Dunque la base $B^{(3)}$ non soddisfa il criterio sufficiente pur essendo la soluzione ottima e unica.
□

10.3.2 Fase I: Costruzione della prima SBA

Come osservato nell'introduzione di questa sezione, la procedura che determina la prima base ammissibile di un problema di Programmazione Lineare viene detta (nella implementazione in due fasi) *Fase I* del Metodo del Simplesso. Lo scopo della Fase I è quello di determinare se il problema (10.3) ha insieme ammissibile non vuoto. In caso affermativo, l'algoritmo che implementa la Fase I individua una base ammissibile, e pone il problema in forma canonica ovvero calcola le quantità $B^{-1}N$ e $B^{-1}b$.

In questa fase dell'algoritmo è anche possibile verificare se la condizione $rango(A) = m$ è effettivamente soddisfatta e, nel caso non lo sia, eliminare le righe di A ridondanti.

Riportiamo ora una breve descrizione della Fase I del metodo del simplesso.
Sia dato un problema di PL in forma standard (10.3). Tale algoritmo è basato sull'uso delle cosiddette *variabili artificiali.* In particolare, dato il problema in forma standard (10.3), introduciamo m nuove variabili $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ e definiamo il seguente *problema ausiliario*:

$$\begin{aligned} \min \quad & z(\alpha, x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \\ & Ax + I_m \alpha = b \\ & x \geq 0_n, \alpha \geq 0_m \end{aligned} \tag{10.6}$$

con $\alpha^T = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Diremo *artificiali* le variabili α_i ed *originarie* le variabili x_i.

Osserviamo che

- Il problema ausiliario ammette sempre un vertice.
- La matrice dei vincoli $(A \quad I_m)$ ha rango pari a m.
- Per il problema (10.6) è immediatamente individuabile una soluzione di base ammissibile. Infatti nella matrice dei vincoli $(A \quad I_m)$ è presente una matrice identità $m \times m$ che costituisce ovviamente una base B; inoltre risulta $B^{-1}b = I_m b = b \geq 0$ e quindi la soluzione $(x, \alpha) = (0, b)$ è ammissibile per il problema ausiliario.
- Inoltre, il problema (10.6) non è illimitato superiormente poichè la non negatività delle variabili artificiali α_i implica la non positività del valore della funzione obiettivo $z(\alpha, x) = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \leq 0$ nella regione ammissibile di (10.6)

Dunque esiste una soluzione ottima (x^*, α^*). Possiamo dimostrare il seguente teorema:

Teorema 10.3.6 *Il problema (10.3) possiede una soluzione ammissibile se e solo se la soluzione ottima* $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$ *del problema (10.6) ha valore* $z(\alpha^*, x^*) = 0$.

Dimostrazione. Se $z(\alpha^*, x^*) = 0$, abbiamo che $\alpha_1^* = \ldots = \alpha_m^* = 0$ e quindi che la relazione $Ax^* + I_m\alpha^* = b$ può essere riscritta nella forma $Ax^* = b$. Di conseguenza, la soluzione $x^* \in I\!R^n$ è ammissibile per (10.3).

Supponiamo, al contrario, che $z(\alpha^*, x^*) > 0$ e che, per assurdo, il problema (10.3) ammetta una soluzione ammissibile $\hat{x} \in I\!R^n$. Poichè $A\hat{x} = b$ e $\hat{x} \geq 0_n$, possiamo definire un vettore $\begin{pmatrix} 0_m \\ \hat{x} \end{pmatrix}$, ammissibile per (10.6) (infatti $A\hat{x} + I_m 0_m = b$ e le sue componenti sono non-negative). Ma il valore della funzione obiettivo di (10.6) calcolata in $\begin{pmatrix} 0_m \\ \hat{x} \end{pmatrix}$ è nullo, contraddicendo l'ottimalità di $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ x^* \end{pmatrix}$. □

Quindi, risolvendo il problema ausiliario (10.6) siamo in grado di decidere se il problema (10.3) è compatibile o no.

La soluzione (x^*, α^*) del problema (10.6) può essere individuata utilizzando la Fase II del Metodo del Simplesso descritta nei paragrafi precedenti partendo dalla SBA iniziale $(x, \alpha) = (0, b)$. Se la soluzione ottima $z(x^*, \alpha^*)$ è non nulla la Fase I termina dichiarando il problema incompatibile. Se, al contrario, $z(x^*, \alpha^*) = 0$ la Fase I consente anche di individuare la prima base ammissibile di (10.3).

Osserviamo che tale SBA del problema (10.3) da utilizzare nella Fase II si ottiene in modo banale se nella SBA ottima (x^*, α^*) tutte le variabili ausiliarie sono fuori dalla base corrispondente e quindi tale base ottima B^* è una sottomatrice di base di A costituisce una base del problema originario (10.3). Dunque x^* rappresenta una SBA del problema corrispondente alla matrice B^*.

Nel caso invece in cui qualche variabile ausiliaria è nella base ottima del problema artificiale, tale base non fornisce immediatamente una base ammissibile per il problema originario, però è possibile, tramite semplici operazioni, trovare una base ammissibile per il problema originario. La costruzione di una soluzione di base ammissibile si basa sulle seguenti considerazioni. Poiché $z(\alpha^*, x^*) = 0$, in base al Teorema 10.3.6 sappiamo che esiste una base relativa alle sole variabili originarie e quindi la soluzione ottima del problema ausiliario è senz'altro degenere, perché $\alpha^* = 0$ e quindi in particolare anche le variabili ausiliarie che si trovano in base hanno valore zero. Possono quindi esistere altre basi che forniscono la stessa soluzione di base ammissibile. Si tratta quindi di stabilire quando e come è possibile costruire una base diversa che produce la stessa SBA. Non entreremo in questo dettaglio.