Capitolo 12

Programmazione Multiobiettivo

12.1 Introduzione

I problemi di ottimizzazione che abbiamo considerato fino a questo momento hanno un solo obiettivo da minimizzare (o massimizzare). In molte situazioni della vita reale ci sono più obiettivi rilevanti. Nel seguito considereremo il seguente problema di ottimizzazione multiobiettivo:

$$\begin{array}{ll} \min & \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\} \\ & x \in \mathcal{F} \end{array} \qquad (12.1)$$

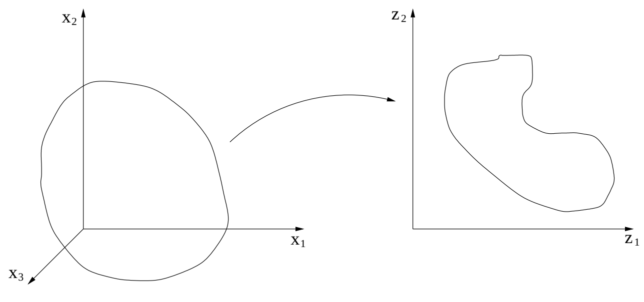
ove $k \geq 2$ e $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, per $i = 1, \dots, k$. Lo spazio $\mathbb{R}^n$ in cui sono definite le variabili x è detto *spazio delle variabili di decisione*, mentre lo spazio $\mathbb{R}^k$ è detto *spazio degli obiettivi*.

Ad ogni *vettore di decisioni* $x \in \mathbb{R}^n$ è associato un vettore $z = (f_1(x),\ f_2(x) \dots\ , f_k(x))^\top \in \mathbb{R}^k$ (*vettore di obiettivi*) nello spazio degli obiettivi. Se $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ è la regione ammissibile nello spazio delle decisioni, $\mathcal{Z} = f(\mathcal{F})$ è l'immagine di $\mathcal{F}$ nello spazio degli obiettivi (vedi figura) e cioè

$$\mathcal{Z} = f(\mathcal{F}) = \left\{ z \in \mathbb{R}^k :\ \exists x \in \mathcal{F},\ z = f(x) \right\}.$$

In particolare diremo che un vettore di obiettivi $z \in \mathbb{R}^k$ è ammissibile quando risulti $z \in \mathcal{Z}$.

La difficoltà in questo tipo di problema risiede nel fatto che molto spesso gli obiettivi sono contrastanti tra loro. Ovvero una soluzione che minimizza un obiettivo, in generale non minimizzerà gli altri. In effetti se esistesse un x^* tale che $f_i(x^*) \leq f_i(x)$ per ogni i e per ogni $x \in \mathcal{F}$,



questo sarebbe il valore ottimo per il problema multi-obiettivo. In generale però

$$f_i(x^{i*}) = \min_{x \in \mathcal{F}} f_i(x)$$

con $x^{i*} \neq x^{j*}$ per almeno una coppia i, j. È quindi necessario dare una nuova definizione di soluzione ottima che introdurremo nel prossimo paragrafo.

Definizione 12.1.1 (Vettore ideale degli obiettivi) *Definiamo il vettore* ideale *degli obiettivi $z^{id} \in I\!R^k$ il vettore di componenti*

$$z_i^{id} = f_i(x^{i*}) = \min_{x \in \mathcal{F}} f_i(x)$$

Consideriamo un semplice esempio.

Un problema di produzione Un'azienda produce tre prodotti P_i, $i = 1, 2, 3$. Nella tabella sono riportati per ogni unità di prodotto il profitto unitario (euro/unità), le ore di lavoro necessarie, la quantità di materiale grezzo utilizzato e il livello di inquinamento generato.

	profitto unitario	ore lavoro	materiale grezzo	inquinamento
P_1	10	4	3	10
P_2	9	3	2	6
P_3	8	2	2	3

L'azienda ha a disposizione operai per 1300 ore di lavoro e 1000 unità di materiale grezzo. L'azienda ha come obiettivi la massimizzazione del profitto e la minimizzazione del livello di inquinamento.

Formulazione.
Si vuole costruire un modello di Programmazione Lineare multiobiettivo che rappresenti il problema in analisi tenendo presente i requisiti richiesti.

– *Variabili.* Le variabili di decisione x_1, x_2, x_3 sono le unità di prodotto P_i, $i = 1, 2, 3$.

– *Vincoli.* I vincoli sono essenzialmente di due tipi: disponibilità di materiale grezzo e di ore lavoro.

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1300$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1000$$

– *Obiettivi.* Si vuole massimizzare il profitto

$$\max\ 10x_1 + 9x_2 + 8x_3$$

e minimizzare l'inquinamento

$$\min\ 10x_1 + 6x_2 + 3x_3.$$

Quindi la formulazione finale è

$$\begin{array}{ll} \min & \{-10x_1 - 9x_2 - 8x_3, 10x_1 + 6x_2 + 3x_3\} \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1300 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1000 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Minimizzando singolarmente i due obiettivi (utilizzando il solutore di Excel) si ottengono i valori $x^{1*} = (0,\ 300,\ 200)^T$ $z_1^{id} = -4300$ (il valore di $z_2(x^{1*}) = 2400$) e $x^{2*} = (0,\ 0,\ 0)$ $z_2^{id} = 0$ (il valore di $z_1(x^{2*}) = 0$), che sono chiaramente contrastanti tra loro.
È possibile scegliere altri punti ammissibili. In particolare nel punto ammissibile $\hat{x} = (100,\ 300,\ 0)^T$ si ottiene un valore $z = (-3700,\ 2800)^T$. Mentre nel punto ammissibile $\bar{x} = (0,\ 0,\ 500)^T$ si ottiene un valore $z = (-4000,\ 1500)^T$ e in $\tilde{x} = (0,\ 100,\ 400)^T$ si ottiene un valore $z = (-4100,\ 1800)^T$. Intuitivamente è chiaro che il valore in $\hat{x}$ è "peggiore" che in $\bar{x}, \tilde{x}$ in quanto entrambi gli obiettivi peggiorano. D'altra parte non è chiaro quale tra $\tilde{x}$ e $\bar{x}$ sia preferibile.

La situazione è riportata in tabella

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2
0	300	200	-4300	2400
0	0	0	0	0
100	300	0	-3700	2800
0	0	500	-4000	1500
0	100	400	-4100	1800

12.2 Ottimalità secondo Pareto

Prima di procedere, è necessario definire con chiarezza cosa si intende per soluzione ottima di un problema di programmazione multiobiettivo. La definizione che adottiamo e che è riportata nel seguito, è stata proposta per la prima volta da Edgeworth nel 1881 e successivamente ripresa da Vilfredo Pareto nel 1896 [2] che la approfondì ulteriormente.

Definizione 12.2.1 (Dominanza) *Dati due vettori $z^1, z^2 \in \mathbb{R}^k$, diciamo che z^1 domina z^2 secondo Pareto ($z^1 \leq_P z^2$) quando risulta*

$$z_i^1 \leq z_i^2 \quad \text{per ogni } i = 1, 2, \ldots, k \text{ e}$$

$$z_j^1 < z_j^2 \quad \text{per almeno un indice } j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Corrispondentemente diremo che un vettore di decisioni $\widehat{x} \in \mathcal{F}$ domina un'altro vettore $x \in \mathcal{F}$ se risulta

$$f(\widehat{x}) \leq_P f(x).$$

Sfruttando la relazione $\leq_P$ possiamo dare la definizione di ottimalità secondo Pareto.

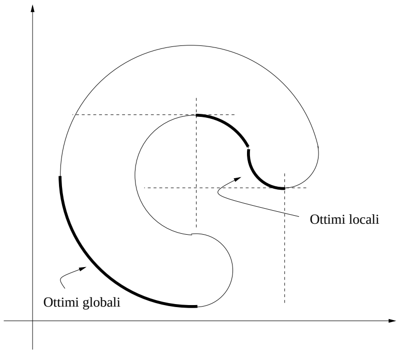


Figura 12.1: Ottimi di Pareto.

Definizione 12.2.2 (Ottimo di Pareto) *Un vettore di decisioni $x^* \in \mathcal{F}$ è un ottimo di Pareto se non esiste un'altro vettore $x \in \mathcal{F}$ che lo domina secondo Pareto. Ovvero se non esiste un'altro vettore $x \in \mathcal{F}$ tale che:*

$$f(x) \leq_P f(x^*).$$

Corrispondentemente diremo che un vettore di obiettivi $z^\star \in \mathcal{Z}$ è ottimo secondo Pareto quando non esiste un altro vettore $z \in \mathcal{Z}$ tale che

$$z \leq_P z^\star.$$

Quindi se ci troviamo in un punto ottimo secondo Pareto e vogliamo ulteriormente diminuire il valore di una o più funzioni obiettivo dobbiamo essere disposti ad accettare un conseguente aumento in alcune (o tutte) le rimanenti funzioni del problema. In tal senso possiamo affermare che, nello spazio degli obiettivi, gli ottimi di Pareto sono punti di *equilibrio* che si trovano sulla frontiera dell'insieme $\mathcal{Z}$.

Definizione 12.2.3 *La frontiera efficiente è l'insieme degli ottimi di Pareto del problema (12.1).*

La definizione di ottimo secondo Pareto è ovviamente, una definizione di ottimo *globale* dato che si richiede la validità di una certa proprietà su *tutto* l'insieme ammissibile del problema (12.1).

La definizione di ottimo secondo Pareto può essere leggermente indebolita ottenendo così la definizione di ottimo *debole* secondo Pareto.

Definizione 12.2.4 (Ottimo debole di Pareto) *Un vettore $x^* \in \mathcal{F}$ è un ottimo di Pareto debole per il problema (12.1) se non esiste un punto $x \in \mathcal{F}$ tale che* *Ottimalità debole secondo Pareto*

$$f(x) < f(x^*).$$

Ovviamente, l'insieme degli ottimi secondo Pareto è contenuto nell'insieme degli ottimi deboli di Pareto.

Esempio 12.2.5 *Sia dato il problema di programmazione multiobiettivo lineare*

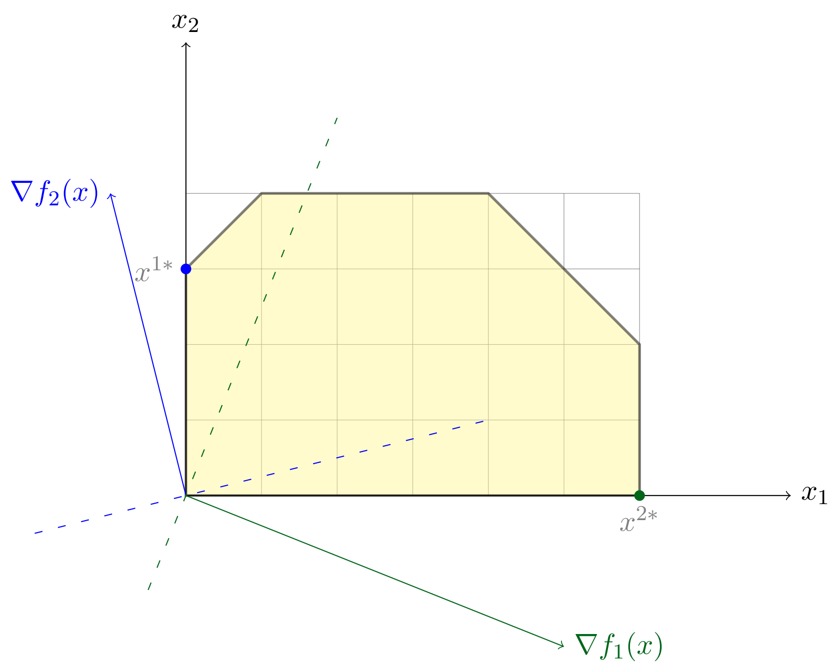


Figura 12.2: Rappresentazione grafica problema 12.2 nello spazio di decisione.

$$\begin{array}{ll} \min & \{5x_1 - 2x_2, -x_1 + 4x_2\} \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \tag{12.2}$$

IL problema in due variabili puó esere risolto graficamente In Figura 12.2 è rappresentata la regione ammissibile $\mathcal{F}$, i gradienti delle due funzioni obiettivo $\nabla f_1(x) = (5, \ -2)^T$, $\nabla f_2(x) = (-1, \ 4)^T$ e i valori ottimi sono $x^{1*} = (6, \ 0)^T, x^{2*} = (1, \ 4)^T$.

L'immagine $f(\mathcal{F})$ nello spazio degli obiettivi del poliedro ammissibile si puó ottenere individuando i punti estremi dell'immagine che si determinano calcolando i valori delle due funzioni obiettivo in ciascuno dei punti estremi del poliedro ammissibile riportati in tabella. L'immagine $f(\mathcal{F})$ é riportata in Figura 12.2 .

x_1	x_2	z_1	z_2
0	0	0	0
6	0	30	-6
6	2	26	2
4	4	12	12
1	4	-3	15
0	3	-6	12

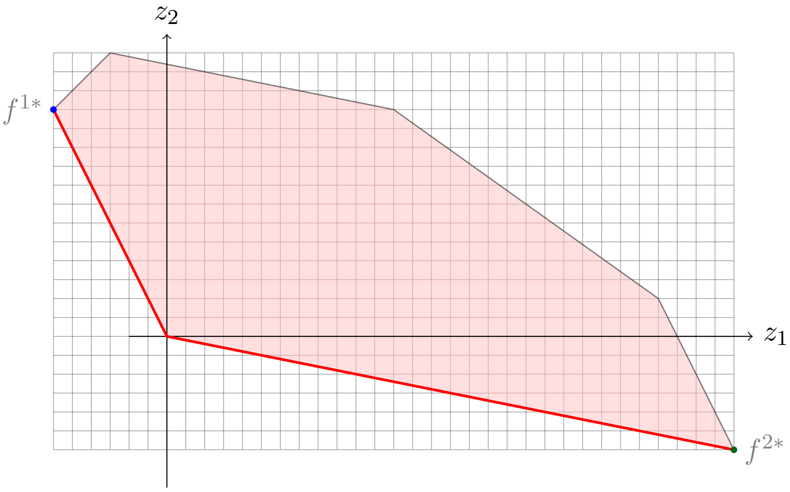


Figura 12.3: Rappresentazione grafica problema 12.2 nello spazio degli obiettivi. In rosso la curva degli ottimi di Pareto.

12.3 Condizioni di Ottimalità

Nelle sezioni precedenti abbiamo dato delle definizioni fondamentali della programmazione multiobiettivo. In particolare, dato che lo spazio delle k-uple di numeri reali è solo parzialmente ordinato, abbiamo dovuto definire cosa si intende per minimo di un vettore di funzioni. Abbiamo altresì visto che le definizioni di ottimo e di ottimo debole secondo Pareto non sono le uniche che è possibile dare e che, anzi, queste sono un caso particolare di una definizione più generale, quella di punto efficiente rispetto ad un cono.

Quello che dobbiamo fare ora, è dare una caratterizzazione analitica dei punti di ottimo secondo Pareto. Come vedremo, tutte le condizioni di ottimo per la programmazione multiobiettivo, comprendono come caso particolare quelle per la programmazione nonlineare (con una sola funzione obiettivo).

Nel seguito consideriamo un problema in cui $\mathcal{F}$ è definito da vincoli di disuguaglianza lineari; cioè:

$$\begin{array}{ll} \min & \{f_1(x),\ f_2(x), \dots, f_k(x)\} \\ & Ax \geq b \end{array} \tag{12.3}$$

Seguendo lo stesso ragionamento fatto per derivare le condizioni di ottimo per problemi vincolati nel Capitoli 6 e 8, accanto al concetto di direzione ammissibile già noto, dobbiamo introdurre un nuovo concetto di direzione efficiente.

Definizione 12.3.1 (Direzione efficiente) *Dato un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$, una direzione efficiente in $\bar{x}$ è un vettore $d \in \mathbb{R}^n$ $(d \neq 0)$ per cui esiste un $\alpha_{\max} > 0$, tale che*

$$f(\bar{x} + \alpha d) \leq_P f(\bar{x}) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_{\max}).$$

Pertanto, spostandoci da $\bar{x}$ lungo la direzione individuata dal vettore d e per spostamenti sufficientemente piccoli, siamo certi di trovare punti che migliorano il valore di almeno una funzione obiettivo senza, al tempo stesso, peggiorare il valore delle rimanenti.

Il concetto di direzione efficiente insieme al concetto di direzione ammissibile introdotta in Def. 6.3.1, ci consentirà di caratterizzare gli ottimi di Pareto del problema 12.3.

Evidentemente, se $\bar{x}$ è un ottimo di Pareto nessuna direzione ammissibile porta a punti tali che $f(x) \leq_P f(\bar{x})$.

Se $\bar{x}$ è un ottimo di Pareto non esiste una direzione efficiente e ammissibile in $\bar{x}$.

Fin qui abbiamo dato una caratterizzazione geometrica dei punti di ottimo secondo Pareto. Quello che adesso vogliamo fare è caratterizzare analiticamente gli ottimi di Pareto. Ovvero derivare le condizioni di KKT per problemi multiobiettivo.

Osserviamo che in generale, per funzioni continuamente differenziabili, è possibile caratterizzare la direzione di discesa utilizzando la condizione del teorema 6.5.1. Ricordando la definizione di direzioni ammissibili 6.3.1 e osservando che risulta

$$\left\{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f_i(\bar{x})^\top d < 0, \ \forall\, i = 1, 2, \dots, k\right\} \subseteq \{d \in \mathbb{R}^n : \ \text{d è una direzione efficiente in } \bar{x}\}$$

si può facilmente affermare che

Se un punto $x^* \in S$ è un ottimo di Pareto del problema (12.3) allora *non esiste* una soluzione $d \in R^n$ al sistema di disequazioni lineare

$$\begin{aligned} &A_I d \geq 0, \\ &\nabla f_i(x^*)^T d < 0 \quad\quad i = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Da notare che la condizione espressa dalle 12.4 caratterizza in realtà punti x^* per cui non esiste un punto $x \in \mathcal{F}$ tale che

$$f(x) < f(x^*).$$

Questa condizione corrisponde ad una definizione più debole di Ottimo secondo Pareto, nota anche come Ottimo debole di Pareto. Ovviamente, l'insieme degli ottimi secondo Pareto è contenuto nell'insieme degli ottimi deboli di Pareto.

Le condizioni geometriche espresse in (12.4) possono essere scritte inf roma algebrica utilizzaando i teoremi dell'alternativa come è stato fatto nel capitolo 8. In particolare il teorema dell'alternativa di Motzkin afferma che, siano B matrice $p \times n$ e G matrice $k \times n$, il sistema

$$Gd > 0, \; Bd \geq 0 \quad d \in \mathbb{R}^n$$

ammette soluzione se e solo se il sistema

$$G^T y + B^T z = 0, \; (z, y) \geq 0, \; y \neq 0$$

con $z \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^k$ non ammette soluzione.

Tale teorema di Motzkin può essere derivato dal Lemma di Farkas.

Teorema 12.3.2 *Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile per il problema (12.3). Allora, condizione necessaria affinché $\bar{x}$ sia un ottimo di Pareto è che sia ammissibile il seguente sistema:*

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} \beta_i \nabla f_i(\bar{x}) = A^T \lambda, \\ &\lambda^\top g(\bar{x}) = 0, \\ &(\beta, \lambda) \geq 0, \quad\quad \beta \neq 0. \end{aligned} \tag{12.5}$$

La dimostrazione non è in programma.

Le condizioni di KKT sono condizioni solo necessarie di ottimo il che vuol dire che potrebbero essere verificate anche in punti non ottimi secondo Pareto. È tuttavia possibile dare condizioni sufficienti di ottimalità, senza ricorrere all'uso delle derivate seconde, a patto però di fare alcune ipotesi aggiuntive sulla struttura del problema (12.3).

In particolare, se le funzioni sono lineari $f_i(x) = c_i^T x$ è possibile caratterizzare esattamente le direzioni efficienti. Consideriamo allora il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \{c_1^T x, c_2^T x, \ldots c_k^T x, \} \\ & Ax \geq b \end{aligned} \tag{12.6}$$

In effetti vale la seguente caratterizzazione

Se f_i sono funzioni lineari, ossia se $f_i(x) = c_i^T x$ per ogni $i = 1, \ldots, k$ allora d è una direzione efficiente (in un qualsiasi punto $x \in I\!R^n$) se e solo se

$$c_i^T d \leq 0$$
$$\sum_{i=1}^{k} c_i^T d < 0$$

Possiamo allora dare la seguente caratterizzazione

Un punto $x^* \in S$ è un ottimo di Pareto di 12.6 se e solo se *non esiste* una soluzione $d \in R^n$ al sistema di disequazioni lineare

$$\begin{aligned} & A_I d \geq 0, \\ & c_i^T d \leq 0 \quad i = 1, \ldots, k \\ & \sum_{i=1}^{k} c_i^T d < 0. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Utilizzando il Lemma di Farkas, è possibile derivare le condizioni di KKT per il problema multiobiettivo lineare.

Teorema 12.3.3 *Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile per il problema (12.3) con $f_i(x) = c_i^T x$. Allora, condizione necessaria e sufficiente affinché $\bar{x}$ sia un ottimo di Pareto è che esistano $\beta^* \in \mathrm{I\!R}^k$ e $\lambda^* \in \mathrm{I\!R}^m$ tali che:*

(i) $Ax^* \geq b$,

(ii) $\sum_{i=1}^{k} \beta_i^* c_i = A^T \lambda^*$,

(iii) $\lambda^* \geq 0$, $\beta^* \geq 1$;

(iv) $\lambda_i^*(b_i - a_i^T x^*) = 0$ *per* $i = 1, \ldots, m$.

Dimostrazione. La dimostrazione segue dall'applicazione del Lemma di Farkas al sistema 12.7 riscritto nella forma

$$\begin{aligned} & A_I d \geq 0, \\ & -c_i^T d \geq 0 \quad i = 1, \ldots, k \\ & \sum_{i=1}^{k} c_i^T d < 0. \end{aligned} \tag{12.8}$$

In particolare sappiamo che *non esiste* una soluzione $d \in R^n$ al sistema di disequazioni lineare (12.8) se e solo se *esiste* una soluzione del sistema

$$\begin{aligned} & A_I^T u^{(1)} - \sum_{i=1}^{k} u_i^{(2)} c_i = \sum_{i=1}^{k} c_i, \\ & u^{(1)}, u^{(2)} \geq 0. \end{aligned} \tag{12.9}$$

dove $u^{(1)}$ è un vettore di dimensione $|I(x^*)|$, $u^{(2)} \in R^k$.

Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} & A_I^T u^{(1)} = \sum_{i=1}^{k}(1 + u_i^{(2)})c_i, \\ & u^{(1)}, u^{(2)} \geq 0. \end{aligned}$$

Possiamo allora porre $\beta_i^* = 1 + u_i^{(2)} \geq 1$ per $i = 1, \ldots, k$. Inoltre

$$\lambda_i^* = \begin{cases} u_i^{(1)} & \text{per } i \in I(x^*) \\ 0 & \text{per } i \notin I(x^*). \end{cases} \tag{12.10}$$

Risulta ovviamente $\lambda^* \geq 0$. Inoltre, della definizione (12.10) di λ^* segue che

$$\lambda_i^*(b_i - a_i^T x^*) = \begin{cases} u_i^{(1)}(b_i - a_i^T x^*) = 0 & \text{per } i \in I(x^*) \\ 0(b_i - a_i^T x^*) = 0 & \text{per } i \notin I(x^*). \end{cases}$$

Infine, ricordando che $A_{I(x^*)}^T u^{(1)} = \sum_{i \in I(x^*)} u_i^{(1)} a_i$ possiamo scrivere

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i c_i = \sum_{i \in I(x^*)} u_i^{(1)} a_i + \sum_{i \notin I(x^*)} 0 \cdot a_i = A^T \lambda^*.$$

□

Esempio 12.3.4 *Consideriamo l'esempio 12.2.5 e verifichiamo che i punti ottimi di Pareto trovati geometricamente soddisfano le condizioni di KKT. In particolare scriviamo le KKT. Introduco la funzione Lagrangiana generalizzata*

$$\begin{aligned} L(x, \beta, \lambda) = \; & \beta_1(5x_1 - 2x_2) + \beta_2(-x_1 + 4x_2) + \lambda_1(-x_1 + x_2 - 3) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 8) \\ & + \lambda_3(x_1 - 6) + \lambda_4(x_2 - 4) - \lambda_5 x_1 - \lambda_6 x_2 \end{aligned}$$

Le condizioni di KKT sono quindi:

$$\begin{aligned} & 5\beta_1 - \beta_2 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_5 = 0 \\ & -2\beta_1 + 4\beta_2 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 - \lambda_6 = 0 \\ & \lambda_1(-x_1 + x_2 - 3) = 0, \quad \lambda_2(x_1 + x_2 - 8) = 0, \quad \lambda_3(x_1 - 6) = 0, \\ & \lambda_4(x_2 - 4) = 0 \quad \lambda_5 x_1 = 0 \quad \lambda_6 x_2 = 0 \\ & \lambda_1 \ldots \lambda_6 \geq 0 \\ & \beta_1, \beta_2 \geq 1 \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che nel punto $(0,\ 0)^T$*, che si trova sulla curva di ottimi di Pareto, esistono moltiplicatori che soddisfano le condizioni di KKT; dalle condizioni di complementarità si ha che* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$*. Dalla stazionarietà si ottiene*

$$\begin{aligned} & 5\beta_1 - \beta_2 - \lambda_5 = 0 \\ & -2\beta_1 + 4\beta_2 - \lambda_6 = 0 \\ & \lambda_5 \ldots \lambda_6 \geq 0 \\ & \beta_1, \beta_2 \geq 1 \end{aligned}$$

che ammette soluzioni, ad esempio si può scegliere $\beta_1 = \beta_2 = 1$ *e* $\lambda_5 = 4, \lambda_6 = 2$

12.4 Metodi di Soluzione

Generare le soluzioni ottime secondo Pareto costituisce una parte essenziale della programmazione vettoriale ed anzi, matematicamente parlando, nella maggior parte dei casi, il problema (12.3) si considera risolto una volta che sia stato individuato l'insieme degli ottimi di Pareto. Tuttavia, non sempre ci si può accontentare semplicemente di aver trovato l'insieme degli ottimi secondo Pareto. Alcune volte è infatti necessario ordinare tutte le soluzioni trovate e quindi selezionare la migliore rispetto a tale ordinamento. Per questo motivo abbiamo bisogno di un *decisore* cioè di qualcuno che ci dica, in base alle sue preferenze, come ordinare l'insieme degli ottimi di Pareto del problema (12.3).

In base al ruolo svolto dal decisore nella strategia di soluzione del problema, i metodi risolutivi della programmazione multiobiettivo vengono spesso suddivisi in quattro grandi categorie.

- *Metodi senza preferenze* nei quali il decisore non ha nessun ruolo e si considera soddisfacente l'aver trovato un qualunque ottimo di Pareto.
- *Metodi a posteriori* nei quali si genera l'insieme di tutti gli ottimi di Pareto e poi lo si presenta al decisore che sceglie la soluzione per lui migliore.
- *Metodi a priori* nei quali il decisore specifica le sue preferenze prima che abbia inizio il processo risolutivo. In base alle informazioni avute dal decisore viene direttamente trovata la soluzione ottima migliore, senza dover dunque generare tutti gli ottimi di Pareto.
- *Metodi interattivi* nei quali il decisore specifica le sue preferenze mano a mano che l'algoritmo procede, guidando in tal modo il processo risolutivo verso la soluzione per lui più soddisfacente.

Al di là di questa distinzione, tutti i metodi di soluzione per la programmazione multiobiettivo si basano sulla medesima idea di fondo, ovvero quella di trasformare il problema originario in uno con *una sola* funzione obiettivo. La tecnica mediante la quale si ottiene il problema mono obiettivo a partire dal problema (12.3) è nota come *scalarizzazione*.

12.4.1 Metodi Senza Preferenze

Nei metodi senza preferenze ci si accontenta di generare una soluzione ottima di Pareto, qualunque essa sia, senza tenere in considerazione le indicazioni del decisore.

Il metodo che presentiamo è noto come metodo *GOAL*. Quello che si fa è cercare la soluzione che minimizza, nello spazio degli obiettivi, la distanza tra la regione ammissibile ($\mathcal{Z}$) e un qualunque punto di riferimento $z^{ref} \notin \mathcal{Z} = f(\mathcal{F})$. Il vettore di riferimento sarà costituito dai valori auspicabili per le singole funzioni obiettivo. In particolare, una possibile scelta di z^{ref} è $z^{ref} = z^{id}$. Il problema che otteniamo è perciò il seguente:

$$\begin{array}{ll} \min & \|f(x) - z^{id}\|_p \\ & g(x) \leq 0 \end{array} \tag{12.11}$$

ove $\|\cdot\|_p$ indica la norma p di un vettore (con $1 \leq p \leq \infty$). In particolare, se $p = \infty$, il problema (12.11) è noto come problema di *Tchebycheff*. Supponiamo di conoscere il vettore ideale *globale* degli obiettivi. Sotto tali ipotesi, il problema (12.11) ammette sempre soluzione. Valgono le seguenti proprietà.

Teorema 12.4.1 *Ogni soluzione globale del problema (12.11) (con $1 \le p < \infty$) è un ottimo globale di Pareto per il problema (12.3).*

Dim. Sia x^* una soluzione globale di (12.11) e supponiamo, per assurdo, che non sia un ottimo globale di Pareto. Deve allora esistere un punto ammissibile $x \in \mathcal{F}$ tale che

$$\begin{array}{l} f_i(x) \le f_i(x^*) \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \\ f_j(x) < f_j(x^*) \quad \text{per qualche } j \in \{1, 2, \dots, k\}. \end{array}$$

Dalle precedenti disuguaglianze otteniamo che

$$\begin{array}{l} f_i(x) - z^{id} \le f_i(x^*) - z^{id} \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \\ f_j(x) - z^{id} < f_j(x^*) - z^{id} \quad \text{per qualche } j \in \{1, 2, \dots, k\}. \end{array}$$

e quindi, sommando ed elevando alla potenza p-esima

$$\sum_{i=1}^{k} \left(f_i(x) - z^{id} \right)^p < \sum_{i=1}^{k} \left(f_i(x^*) - z^{id} \right)^p$$

il che è ovviamente assurdo, dovendo essere x^* minimo globale del problema (12.11). $\square$

Nel caso in cui $p = \infty$ vale invece la seguente proprietà.

Teorema 12.4.2 *Ogni ottimo globale del problema di Tchebycheff (P_∞) è un ottimo debole di Pareto del problema (12.3).* $\square$

Tuttavia, la seguente proposizione, ci assicura l'esistenza di almeno una soluzione di (P_∞) ottima secondo Pareto per il problema (12.3).

Teorema 12.4.3 *Il problema di Tchebycheff (P_∞) ha almeno una soluzione che è ottima secondo Pareto.* $\square$

Le scelte di $p = 1$ e $p = \infty$ sono particolarmente vantaggiose nel caso in cui il problema multiobiettivo originario è lineare ($f_i(x), g_j(x)$ lineari per ogni i e j). Mediante semplici manipolazioni sul problema (12.11) è infatti possibile ottenere ancora un problema lineare e quindi adottare le ben note tecniche della PL per la sua soluzione. Supponiamo che (12.3) sia lineare ovvero

$$\begin{array}{ll} \min & (c_1^\top x, c_2^\top x, \dots, c_k^\top x) \\ & Ax \le b \end{array}$$

• *Norma $p = 1$.*
Il problema scalarizzato

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{k} |c_i^\top x - z_i^{id}| \\ & Ax \le b \end{array}$$

può essere facilmente trasformato in un problema di PL con l'aggiunta di k variabili ausiliarie, α_i per $i = 1, 2, \dots, k$, ottenendo:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \\ & \begin{cases} |c_i^\top x - z_i^{id}| \le \alpha_i & i = 1, 2, \dots, k \\ Ax \le b \end{cases} \end{array}$$

• *Norma $p = \infty$.*
In questo caso, il problema scalarizzato

$$\begin{array}{ll} \min & \max\limits_{i=1,\ldots,k} \{|c_i^\top x - z_i^{id}|\} \\ & Ax \le b \end{array}$$

può essere facilmente trasformato in un problema di PL con l'aggiunta di una sola variabile ausiliaria, α, ottenendo:

$$\begin{array}{l} \min \ \ \alpha \\ \left\{ \begin{array}{ll} |c_i^\top x - z_i^{id}| \le \alpha & i = 1, 2, \ldots, k \\ Ax \le b \end{array} \right. \end{array}$$

Esempio 12.4.4 *Considerimao nuovamente l'esempio 12.2.5.*

12.4.2 Metodi a Posteriori

I metodi appartenenti a questa classe sono anche noti come metodi per generare l'insieme delle soluzioni di Pareto. Infatti, siccome le preferenze del decisore vengono considerate solo al termine del processo risolutivo, quello che si fa è generare tutti i punti ottimi secondo Pareto. Una volta che l'insieme delle soluzioni di Pareto è stato generato, esso viene presentato al decisore che seleziona il o i vettori per lui migliori.

L'inconveniente principale di questa strategia sta nel fatto che il processo di generazione degli ottimi di Pareto è, molto spesso, computazionalmente oneroso. Inoltre, potrebbe non essere semplice, per il decisore, scegliere una soluzione tra gli ottimi che gli vengono presentati, in special modo se questi sono numerosi. Per questo motivo, è molto importante il modo con il quale le soluzioni vengono presentate al decisore.

Metodo dei Pesi

Consideriamo il seguente problema

$$\begin{array}{ll} \min & \sum\limits_{i=1}^{k} w_i f_i(x) \\ & g(x) \le 0 \end{array} \tag{12.12}$$

ove $w \in I\!R_+^k$ e i coefficienti w_i si intendono normalizzati cioè tali che

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = 1.$$

Esiste una relazione tra le soluzioni di (12.12) e i punti di Pareto di (12.3). La seguente proposizione mette in evidenza proprio questa relazione.

Teorema 12.4.5 *Ogni soluzione globale del problema (12.12) è un ottimo debole di Pareto per il problema (12.3).* □

Nel caso in cui il problema (12.12) ammette una unica soluzione allora si può stabilire un risultato un po' più forte del precedente.

Teorema 12.4.6 *Se il problema (12.12), fissato il vettore dei pesi $w \geq 0$, ammette una unica soluzione allora essa è un ottimo di Pareto per il problema (12.3).*

Dimostrazione. Sia $x^* \in \mathcal{F}$ l'unica soluzione di (12.12) e supponiamo, per assurdo, che x^* non sia un ottimo di Pareto di (12.3). In tal caso deve necessariamente esistere un altro punto $x \in \mathcal{F}$ tale che

$$\begin{aligned} &f_i(x) \leq f_i(x^*) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k \\ &f_j(x) < f_j(x^*) \quad \text{per qualche } j \in \{1, 2, \ldots, k\}. \end{aligned} \tag{12.13}$$

Ricordando che i pesi w_i sono non negativi abbiamo, moltiplicando ciascuna delle (12.13) per w_i e sommando tutto quanto, che

$$\sum_{i=1}^{k} w_i f_i(x) \leq \sum_{i=1}^{k} w_i f_i(x^*). \tag{12.14}$$

Siccome, però, x^* è l'unico punto di minimo di (12.12) risulta

$$\sum_{i=1}^{k} w_i f_i(x^*) < \sum_{i=1}^{k} w_i f_i(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in \mathcal{F}$$

che è ovviamente in contrasto con la (12.14). □

Allo stesso modo, se i pesi w_i sono tutti strettamente positivi è possibile dimostrare la seguente

Teorema 12.4.7 *Se $w_i > 0$ per ogni indice i, ogni soluzione globale del problema (12.12) è un ottimo di Pareto per il problema (12.3).* □

Nell'ipotesi in cui il problema multiobiettivo (12.3) è convesso, è possibile stabilire la seguente proprietà di esistenza .

Teorema 12.4.8 *Sia x^* un ottimo di Pareto per il problema (12.3). Se (12.3) è convesso allora esistono dei pesi $w \in I\!R^k_+$ con*

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$$

e tali che x^* è soluzione anche del problema (12.12). □

Metodo degli ε-vincoli (cfr. [1, sez. 3.2])

Si seleziona una funzione obiettivo $f_l(x)$ tra gli obiettivi di (12.3) e poi si trasformano tutte le altre funzioni $f_i(x)$ (con $i = 1, 2, \ldots, k \; i \neq l$) in vincoli, imponendo degli *upper bound* sui loro valori. Il problema che otteniamo è allora il seguente:

$$\begin{array}{ll} \min & f_l(x) \\ & f_i(x) \leq \varepsilon_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k \; i \neq l \\ & Ax \geq 0 \end{array} \tag{12.15}$$

ove $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Teorema 12.4.9 *Ogni soluzione di (12.15) è un ottimo debole secondo Pareto per il problema (12.3).* □

La prossima proposizione fornisce condizioni necessarie e sufficienti di ottimalità (secondo Pareto) per il problema (12.3) delle soluzioni di (12.15).

Teorema 12.4.10 *Un vettore $x^* \in \mathcal{F}$ è ottimo secondo Pareto di (12.3) se e solo se è soluzione di (12.15) per ogni scelta di $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ ed essendo $\varepsilon_i = f_i(x^*)$ con $i \neq l$.*

Dimostrazione (non in programma). (Necessità) Sia x^* un otimo di Pareto di (12.3) e supponiamo per assurdo che esso non sia soluzione del problema (12.15) per qualche $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ con $\varepsilon_i = f_i(x^*)$ (per ogni $i \neq l$).

Se questo è vero, allora deve esistere un punto $x \in \mathcal{F}$ tale che:

$$\begin{aligned} & f_l(x) < f_l(x^*) \quad \text{e} \\ & f_i(x) \leq \varepsilon_i = f_i(x^*) \quad \forall i \neq l. \end{aligned}$$

Pertanto abbiamo ottenuto che x^* non è un ottimo di Pareto per (12.3), il che è assurdo.

(Sufficienza) Sia ora $x^* \in \mathcal{F}$ una soluzione di (12.15) per ogni $l \in \{1, 2, \dots, k\}$. Da questo fatto segue che allora non può esistere alcun vettore $x \in \mathcal{F}$ tale che

$$\begin{aligned} & f_l(x) < f_l(x^*) \quad \text{e} \\ & f_i(x) \leq f_i(x^*) = \varepsilon_i \quad \forall i \neq l. \end{aligned}$$

Il punto x^* è quindi, in base alle precedenti relazioni, Pareto ottimo. □

Teorema 12.4.11 *Se il punto $x^* \in \mathcal{F}$ è l'unica soluzione del problema (12.15) per qualche $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ e con $\varepsilon_j = f_j(x^*)$ per ogni $j \neq l$ allora esso è Pareto ottimo per il problema (12.3).* □