Capitolo 2

Modelli di Ottimizzazione

2.1 Introduzione

In questo capitolo ci occuperemo più nel dettaglio di quei particolari modelli matematici noti come *Modelli di Ottimizzazione* che rivestono un ruolo centrale nella RO. In termini generali, data una funzione $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, ed $S \subseteq \mathbb{R}^n$, un *problema di Ottimizzazione* può essere formulato nella forma:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & x \in S. \end{array} \tag{PO}$$

Quindi un problema di Ottimizzazione consiste nel determinare, se esiste, un punto di minimo della funzione f tra i punti dell'insieme S. I problemi di ottimizzazione sono spesso denominati, con terminologia equivalente, problemi di Programmazione Matematica.
Osserviamo subito che un problema di massimo si può sempre ricondurre a un problema di minimo, cambiando di segno la funzione obiettivo. Infatti, i punti di massimo (ove esistano) del problema

$$\begin{array}{ll} max & f(x) \\ & x \in S \end{array}$$

coincidono con i punti di minimo del problema

$$\begin{array}{ll} min & -f(x) \\ & x \in S \end{array}$$

e risulta: $\max\limits_{x \in S} f(x) = -\min\limits_{x \in S}(-f(x))$.

In base a tale osservazione ci si può riferire esclusivamente, senza perdita di generalità, a problemi di minimizzazione.

La funzione f viene chiamata *funzione obiettivo* e l'insieme S *insieme ammissibile* cioè l'insieme delle possibili soluzioni del problema. Un punto $x \in S$ si chiama *soluzione ammissibile*.

L'insieme ammissibile S è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e quindi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ è una variabile vettoriale n-dimensionale e la funzione obiettivo f è una funzione di n variabili reali $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2.2 Definizioni preliminari

Si riportano di seguito alcune definizioni fondamentali riguardanti i problemi di Ottimizzazione.

Definizione 2.2.1 (Problema inammissibile) *Il problema di ottimizzazione (PO) si dice* inammissibile *se $S = \emptyset$, cioè se non esistono soluzioni ammissibili.*

Definizione 2.2.2 (Problema illimitato) *Il problema di ottimizzazione (PO) si dice* illimitato (inferiormente) *se comunque scelto un valore $M > 0$ esiste un punto $x \in S$ tale che $f(x) < -M$.*

Un esempio di PO illimitato inferiormente è dato da $f(x) = x^3$ e $S = \{x : x \leq 2\}$. Infatti, al tendere di x a $-\infty$ la funzione obiettivo tende anch'essa a $-\infty$. Notiamo che se, con la stessa funzione obiettivo, si cambia l'insieme S, e si pone $S = \{x : x \geq 0\}$, il problema non è più illimitato inferiormente.

Definizione 2.2.3 (Punto di minimo globale) *Si dice che il problema di ottimizzazione (PO)* ammette soluzione ottima (finita) *se esiste un $x^\star \in S$ tale che risulti*

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{per ogni} \quad x \in S.$$

Il punto $x^\star$ è detto soluzione ottima *o* minimo globale *e il corrispondente valore $f(x^\star)$ di dice* valore ottimo.

Per esempio, se si pone $f = x^2$ e $S = \mathbb{R}$, l'ottimo è l'origine, e il corrispondente valore ottimo è zero. Se si prende $S = \{x : x \geq 2\}$, l'ottimo è 2 e il valore ottimo 4.

In molti problemi di ottimo, in cui la ricerca di soluzioni globali può risultare difficile, può avere interesse anche la ricerca di soluzioni di tipo "locale". Indichiamo allora con $U(x)$ un *intorno di un punto x* e consideriamo la definizione seguente.

Definizione 2.2.4 (Punto di minimo locale) *Un punto* $x^* \in S$ *si dice* punto di minimo locale *di* f *su* S *se* esiste *un intorno* $U(x^*)$ *di* x^* *tale che:*

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{per ogni} \quad x \in S \cap U(x^*),$$

e, in tal caso, si dice che $f(x^*)$ *è* un minimo locale *di* f *su* S.
Si dice che $x^* \in S$ *è un* punto di minimo locale stretto *di* f *su* S *se* esiste *un intorno* $U(x^*)$ *di* x^* *tale che:*

$$f(x^*) < f(x), \quad \text{per ogni} \quad x \in S \cap U(x^*),\ x \neq x^*.$$

Per esempio, se si pone $f = -x^2$ e $S = \{x : -2 \leq x \leq 1\}$, l'ottimo (minimo globale) è $x = -2$ di valore ottimo -4, ed il punto $x = 1$ è un minimo *locale* di valore pari a 1.

È immediato rendersi conto del fatto che

un punto di minimo globale è anche un punto di minimo locale, ma non è vero in generale il viceversa.

Naturalmente si può anche presentare il caso in cui la funzione obiettivo è limitata inferiormente su S ossia:

$$\inf_{x \in S} f(x) > -\infty,$$

ma tuttavia *non esistono punti di minimo globale* di f su S.
"Risolvere" un problema di ottimizzazione significa quindi, in pratica:

- stabilire se l'insieme ammissibile è non vuoto, oppure concludere che non esistono soluzioni ammissibili;
- stabilire se esistono soluzioni ottime, oppure dimostrare che il problema non ammette soluzioni ottime;
- determinare (eventualmente in modo approssimato) una soluzione ottima.

All'interno dei problemi di Ottimizzazione si possono distinguere le seguenti importanti classi di problemi:

- **Problemi di Ottimizzazione Continua.**
  Le variabili possono assumere tutti i valori reali ($x \in \mathbb{R}^n$); ed inoltre si parla di problemi di ottimizzazione continua
  - *vincolata* se $S \subset \mathbb{R}^n$
  - *non vincolata* se $S = \mathbb{R}^n$.
- **Problemi di Ottimizzazione Discreta.**
  Le variabili sono vincolate ad essere numeri interi ($x \in \mathbf{Z}^n$); si possono distinguere all'interno di questa classe di problemi altre due classi:
  - *programmazione a numeri interi* se $S \subseteq \mathbf{Z}^n$
  - *ottimizzazione booleana* se $S \subseteq \{0, 1\}^n$.
- **Problemi misti.**
  Solo alcune delle variabili sono vincolate ad essere intere.

2.3 Problemi di Programmazione Matematica

Di solito l'insieme ammissibile S viene descritto da una numero finito di diseguaglianze del tipo $g(x) \leq 0$, dove g è una funzione definita su $\mathbb{R}^n$ a valori reali. Cioè, formalmente, date m funzioni $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ si esprime S nella forma

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \ | \ g_1(x) \leq 0, \ \ g_2(x) \leq 0, \ \ \ldots \ \ , \ \ g_m(x) \leq 0\} \, .$$

Ogni diseguaglianza $g_i(x) \leq 0$ prende nome di *vincolo* e l'insieme ammissibile è quindi formato da tutti quei punti $x \in \mathbb{R}^n$ che sono soluzione del sistema di diseguaglianze

$$\begin{array}{rcl} g_1(x) & \leq & 0 \\ g_2(x) & \leq & 0 \\ g_3(x) & \leq & 0 \\ & \vdots & \\ g_m(x) & \leq & 0 \end{array}$$

Osservazione 2.3.1 In questa formulazione dell'insieme S si sono utilizzati vincoli di diseguaglianza nella forma di minore o uguale, ma è chiaro che questa notazione include i casi in cui i vincoli sono espressi con vincoli di disuguaglianza nella forma di maggiore o uguale e vincoli di uguaglianza; infatti si può sempre trasformare un vincolo di maggiore o uguale del tipo $g(x) \geq 0$ in un vincolo di minore o uguale semplicemente riscrivendolo nella forma $-g(x) \leq 0$. Inoltre un vincolo di uguaglianza $g(x) = 0$ può essere riscritto nella forma equivalente delle due diseguaglianze $g(x) \leq 0$ e $-g(x) \leq 0$.

Quindi si può riscrivere il problema di ottimizzazione (PO) nella forma

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \tag{2.1}$$

Un problema di questo tipo viene chiamato *problema di Programmazione Matematica.*

I problemi di Programmazione Matematica si possono classificare in base alle proprietà della funzione obiettivo e dei vincoli prendendo in considerazione, tra le più significative la *linearità*, la *convessità*.
Una prima distinzione è quella che fa riferimeno all'ipotesi di linearità. Da tale punto di vista, possiamo distinguere:

- problemi di Programmazione Lineare (PL), in cui l'obiettivo è una funzione lineare del tipo
$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$
e i vincoli sono espressi da un sistema di equazioni e disequazioni lineari, cioè esprimibili nella forma
$$a_{i1}x_1 + \quad \dots \quad + a_{in}x_n \geq (\leq / =) b_i$$
- problemi di Programmazione Non Lineare (PNL), in cui l'obiettivo oppure i vincoli non sono tutti lineari.

I problemi di PNL corrispondono alla situazione più generale. I problemi non vincolati rientrano nella classe di PNL, infatti, in tal caso f è necessariamente una funzione *non lineare* da R^n in R; è facile verificare che se f fosse lineare il problema non ammetterebbe soluzione.
Inoltre, in linea di principio, possono essere formulati come problemi di PNL anche i problemi combinatori.

La classificazione dei problemi di Programmazione Matematica in base alla proprietà di convessità sarà affrontata nel Capitolo 5.

Alcuni esempi di problemi di Programmazione Matematica sono i seguenti:

Esempio 2.3.2 *Si consideri una funzione obiettivo di due variabili $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ che si vuole minimizzare, con i vincoli $2x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Si ottiene il problema*

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

che è nella forma (2.1) dove $g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1$, $g_2(x_1, x_2) = -x_1$, $g_3(x_1, x_2) = -x_2$. L'insieme ammissibile è descritto attraverso da tre vincoli. Poiché tutte le funzioni che compaiono sono lineari nella variabili x_1 e x_2, questo problema è un problema di Programmazione Lineare.

Esempio 2.3.3 *Si consideri una funzione obiettivo $f(x_1, x_2) = (x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2$ che si vuole massimizzare, con i vincoli $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_1 \leq 1$, $x_2 \leq 1$. Si ottiene il problema*

$$\begin{array}{ll} \min & -(x_1 - \frac{1}{2})^2 - (x_2 - \frac{1}{2})^2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 1 \end{array}$$

che è nella forma (2.1) dove $g_1(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2$, $g_2(x_1, x_2) = x_1 - 1$, $g_3(x_1, x_2) = x_2 - 1$. *L'insieme ammissibile è un poliedro; la funzione obiettivo è quadratica. Si tratta quindi di un problema di Programmazione Non Lineare.*

Esempio 2.3.4 *Si consideri una funzione obiettivo* $f(x_1, x_2) = 3x_1^3 + 7x_1^2 + x_2$ *che si vuole minimizzare, con vincoli* $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 1$. *Si ottiene il problema*

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1^3 + 7x_1^2 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2} \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 1 \end{array}$$

che è un problema di Programmazione Non Lineare che può essere facilmente ricondotto nella forma (2.1) riscrivendo gli ultimi due vincoli nella forma $-x_1 \leq 0$ *e* $-x_2 \leq -1$.

Esempio 2.3.5 *Si consideri una funzione obiettivo* $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ *che si vuole minimizzare sulla regione ammissibile descritta dal vincolo di uguaglianza* $4x_1 - x_2 = -2$. *Il problema risultante è:*

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 \\ & 4x_1 - x_2 = -2 \end{array}$$

che è un problema di Programmazione Lineare con un solo vincolo di uguaglianza.

2.4 Esempi di modelli di Programmazione Matematica

Come primi esempi di costruzione di modelli verranno ora analizzati dei semplici problemi di pianificazione della produzione e un problema di progettazione industriale.

Esempio 2.4.1 (Un problema di produzione (allocazione di risorse)) *Un colorificio produce due tipi di coloranti* **C1** *e* **C2** *utilizzando 3 preparati base in polvere* **P1**, **P2**, **P3** *che vengono sciolti in acqua. La differente concentrazione dei preparati base dà origine ai due diversi tipi di coloranti. Le quantità (in ettogrammi) di preparati base necessarie per produrre un litro di colorante di ciascuno dei due tipi è riportato nella seguente tabella*

	C1	**C2**
P1	*1*	*1*
P2	*1*	*2*
P3	-	*1*

Ogni giorno la quantità di ciascuno dei preparati base (in ettogrammi) della quale il colorificio può disporre è la seguente

P1	**P2**	**P3**
750	*1000*	*400*

Il prezzo di vendita del colorante **C1** *è di 7 Euro al litro, mentre il colorante* **C2** *viene venduto a 10 Euro al litro. Determinare la strategia ottimale di produzione giornaliera in modo da massimizzare i ricavi ottenuti dalla vendita dei due coloranti.*

Formulazione.
Si vuole costruire il modello di Programmazione Lineare che rappresenti il problema in analisi considerando le limitazioni date dalle produzioni effettivamente realizzabili.

È immediato associare le variabili di decisione ai quantitativi di coloranti prodotti. Siano, quindi, rispettivamente x_1 e x_2 i quantitativi (in litri) da produrre giornalmente dei due coloranti.

Nel formulare il modello di Programmazione Lineare si deve verificare che siano soddisfatte le ipotesi fondamentali:

- *Proporzionalità.*

  I consumi dei preparati base e i ricavi ottenibili sono proporzionali ai quantitativi di coloranti prodotti. Ad esempio, per produrre una quantità x_2 di colorante **C2** si consumano $2x_2$ ettogrammi di **P2** e dalla vendita di x_2 litri di **C2** si ricavano $10x_2$ migliaia di lire indipendentemente dalla quantità prodotta e venduta dell'altro tipo di colorante.

- *Additività.*

  I consumi dei preparati base e i ricavi rispettivamente associati alla produzione dei due coloranti sono additivi, nel senso che per produrre x_1 litri di colorante **C1** e x_2 di **C2** si consumano x_1+2x_2 ettogrammi di preparato di base **P2** e si ricavano $7x_1+10x_2$ migliaia di lire.

- *Continuità.*

  Ogni variabile introdotta nel modello può assumere tutti i valori reali nell'intervallo di ammissibilità.

– *Variabili.* Come già detto, prendiamo come variabili di decisione x_1 e x_2, rispettivamente i quantitativi (in litri) di colorante **C1** e **C2** da produrre giornalmente.
– *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal profitto totale che per le ipotesi fatte è dato (in Euro) da $7x_1 + 10x_2$.
– *Vincoli.* Poiché il consumo di preparati base non può essere superiore alla disponibilità si deve avere

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 750 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 1000 \\ x_2 &\leq 400. \end{aligned}$$

Inoltre si deve esplicitare il vincolo di non negatività sulle variabili

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Quindi la formulazione finale è

$$\begin{array}{ll} \max & 7x_1 + 10x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 750 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ & x_2 \leq 400 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Esempio 2.4.2 (Un problema di pianificazione della produzione industriale)) *Un'industria chimica fabbrica 4 tipi di fertilizzanti,* **Tipo 1**, **Tipo 2**, **Tipo 3**, **Tipo 4**, *la cui lavorazione è affidata a due reparti dell'industria: il reparto produzione e il reparto confezione. Per ottenere fertilizzante pronto per la vendita è necessaria naturalmente la lavorazione in entrambi i reparti. La tabella che segue riporta, per ciascun tipo di fertilizzante i tempi (in ore) necessari di lavorazione in ciascuno dei reparti per avere una tonnellata di fertilizzante pronto per la vendita.*

	Tipo 1	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Tipo 4**
Reparto produzione	2	1.5	0.5	2.5
Reparto confezionamento	0.5	0.25	0.25	1

Dopo aver dedotto il costo del materiale grezzo, ciascuna tonnellata di fertilizzante dà i seguenti profitti (prezzi espressi in Euro per tonnellata)

	Tipo 1	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Tipo 4**
profitti netti	250	230	110	350

Determinare le quantità che si devono produrre settimanalmente di ciascun tipo di fertilizzante in modo da massimizzare il profitto complessivo, sapendo che settimanalmente il reparto produzione può lavorare al più 100 ore mentre il reparto confezionamento può lavorare al più 50 ore settimanali.

Analisi del problema e costruzione del modello.

Si tratta di un problema di pianificazione della produzione industriale. Costruiamo un modello di Programmazione Matematica rappresentante il problema in analisi supponendo di voler pianificare la produzione settimanale.

– *Variabili di decisione.* La scelta delle variabili di decisione é molto delicata: infatti la qualitá dell'intero modello dipenderá da essa. In genere, per stabilire l'opportuno insieme di variabili di decisione, conviene porsi la seguente domanda: che cosa vuole sapere il decisore alla fine del processo di ottimizzazione? Ancora meglio, cosa gli é *sufficiente* sapere, per prendere le sue decisioni? In questo caso, ad esempio, tutto ció che il decisore deve conoscere sono le quantitá di fertilizzante da produrre per ciascun tipo. Dunque introduciamo le variabili reali x_1, x_2, x_3, x_4 rappresentanti rispettivamente le quantità di prodotto del **Tipo 1**, **Tipo 2**, **Tipo 3**, **Tipo 4** da fabbricare in una settimana.

– *Funzione Obiettivo.* Ciascuna tonnellata di fertilizzante contribuisce al profitto totale secondo la tabella data. Quindi il profitto totale sarà

$$250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4. \tag{2.2}$$

L'obiettivo dell'industria sarà quello di scegliere le variabili x_1, x_2, x_3, x_4 in modo che l'espressione (2.2) del profitto sia massimizzata. La (2.2) rappresenta la funzione obiettivo.

– *Vincoli.* Ovviamente la capacità produttiva della fabbrica limita i valori che possono assumere le variabili x_j, $j = 1, \ldots, 4$; infatti si ha una capacità massima lavorativa in ore settimanali di ciascun reparto. In particolare per il reparto produzione si hanno a disposizione al più 100 ore settimanali e poiché ogni tonnellata di fertilizzante di **Tipo 1** utilizza il reparto produzione per 2 ore, ogni tonnellata di fertilizzante di **Tipo 2** utilizza il reparto produzione per 1.5 ore e così via per gli altri tipi di fertilizzanti si dovrà avere

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100. \tag{2.3}$$

Ragionando in modo analogo per il reparto confezionamento si ottiene

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50. \tag{2.4}$$

Le espressioni (2.3), (2.4) costituiscono i vincoli del modello. Si devono inoltre esplicitare vincoli dovuti al fatto che le variabili x_j, $j = 1, \ldots 4$ rappresentando quantità di prodotto non possono essere negative e quindi vanno aggiunti i vincoli di non negatività

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

La formulazione finale sarà quindi

$$\begin{array}{ll} \max & 25x_1 + 23x_2 + 11x_3 + 35x_4 \\ & 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100 \\ & 0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{array}$$

Questa formulazione è un problema matematico ben definito e costituisce il modello di Programmazione Matematica rappresentante il problema di pianificazione della produzione industriale in analisi. Si tratta, in questo caso, di un problema di programmazione lineare. □

Esempio 2.4.3 (Dimensionamento ottimo) *Un'industria deve costruire un silos di forma cilindrica. Tale silos deve essere posto in un magazzino appoggiato su una delle basi. Tale magazzino è a pianta rettangolare di dimensioni metri* 20×10 *ed ha un tetto spiovente lungo il lato di 10 metri, che ha altezza massima di metri* 5 *e altezza minima di metri* 3. *Per costruire questo silos deve essere usato del materiale plastico sottile flessibile che può essere tagliato, modellato e incollato saldamente. Sapendo che si dispone di non più di* 200 m^2 *di tale materiale plastico si costruisca un modello che permetta di determinare le dimensioni del silos (raggio di base ed altezza) in modo da massimizzare la quantità di liquido che può esservi contenuto.*

Analisi del problema e costruzione del modello.

Si tratta di determinare il dimensionamento ottimale di un contenitore cilindrico per uso industriale cercando di massimizzare il suo volume tenendo presente che deve essere contenuto in un magazzino di dimensioni fissate.

Si devono definire formalmente le variabili di decisione, l'insieme delle soluzioni ammissibili e la funzione obiettivo.

– *Variabili di decisione.* È immediato introdurre due variabili x e y che rappresentano rispettivamente la lunghezza (in metri) del raggio di base e dell'altezza del contenitore cilindrico.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo è rappresentata dal volume del contenitore cilindrico ed è data da

$$\pi x^2 y.$$

– *Vincoli.* Il diametro della base non può superare le dimensioni del magazzino e quindi deve essere

$$2x \leq 10.$$

La limitazione dell'altezza del contenitore varia al variare del diametro di base in quanto il tetto è spiovente. Dato che la pendenza del tetto è del 20%, dovrà risultare

$$y \leq 5 - 0.2 \cdot 2x.$$

Inoltre disponendo solo di una quantità limitata di materiale plastico la superficie totale del contenitore cilindrico non può superare $200m^2$ e quindi deve risultare

$$2\pi x^2 + 2\pi xy \leq 200.$$

Si devono infine esplicitare i vincoli di non negatività $x \geq 0$, $y \geq 0$.

La formulazione complessiva risulta quindi

$$\begin{array}{ll} \max & x^2 y \\ & x \leq 5 \\ & y \leq 5 - 0.2 \cdot 2x \\ & 2\pi x^2 + 2\pi xy \leq 200 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{array}$$

Il modello è quindi un modello di programmazione non lineare. □

Esempio 2.4.4 (Discriminazione del prezzo)
Consideriamo un monopolista che operi su due mercati distinti (ad es. nazionale ed estero) ciascuno con una diversa funzione di domanda. Indichiamo con x_i l'offerta sul mercato $i = 1, 2$ e con $P_i = f_i(x_i)$ la funzione di domanda inversa sul mercato i. Supponiamo inoltre che il costo di produzione sia proporzionale con una costante c alla offerta complessiva $x_1 + x_2$. Il problema consiste nel massimizzare il profitto del monopolista.

Analisi del problema e costruzione del modello.

– *Variabili di decisione.* È immediato considerare le due variabili x_1, x_2 che rappresentano l'offerta sui due mercati distinti del bene.

– *Funzione obiettivo.* Su vuole massimizzare il profitto, ovvero ricavo meno costi. La funzione ricavo è

$$x_1 f_1(x_1) + x_2 f(x_2),$$

mentre il costo è $c(x_1 + x_2)$. Il profitto totale sarà quindi

$$f(x) = x_1 f_1(x_1) + x_2 f(x_2) - c(x_1 + x_2).$$

– *Vincoli.* Poiché le due variabili rappresentano un'offerta si tratta di quantità non negative $x_i \geq 0$ per $i = 1, 2$.

Più in generale nel caso di n mercati distinti, posto $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ si ha l'insieme ammissibile:

$$S = \{x \in R^n : \ x \geq 0\}.$$

Il problema di ottimizzazione corrispondente è

$$\max_{x \in S} \sum_{i=1}^n x_i f_i(x_i) - c \sum_{i=1}^n x_i.$$

Molto spesso le funzioni $f_i(x_i)$ hanno un andamento lineare del tipo

$$f_i(x_i) = a_i - m_i x_i \qquad \text{con } m_i > 0.$$

La funzione ricavo risulta essere quindi una funzione quadratica del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(a_i - m_i x_i) = -x^T M x + a^T x$$

con M matrice diagonale ad elementi positivi diag$\{m_i\}_{i=1}^n$ e $a = (a_1 \ldots, a_n)^T$. $\square$

Esempio 2.4.5 (Problemi di approssimazione o di *curve fitting*)
Supponiamo di conoscere i valori $\phi(t_i)$ che una funzione continua $\phi : R \to R$ assume in punti t_i con $i = 1, \ldots, N$ in un intervallo $[t_{\min}, t_{\max}]$. Si vuole approssimare $\phi(t)$ su un intervallo assegnato $[t_{\min}, t_{\max}]$ per mezzo di un polinomio di grado n:

$$p_n(t; x) = \sum_{k=0}^{n} x_k t^k,$$

in cui x_k, per $k = 0, \ldots, n$ sono i coefficienti (incogniti) del polinomio e in cui si é posto

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R^{n+1}.$$

Si possono definire gli errori

$$e_i(x) = \phi(t_i) - p_n(t_i; x), \quad i = 1, \ldots, m,$$

che rappresentano la differenza tra il valore effettivo della funzione $\phi(t_i)$ e il valore ottenuto con la funzione approssimante $p_n(t_i; x)$. È allora possibile considerare diverse funzioni di ottimo

1. *minimizzazione dell'errore quadratico medio*

$$\min \sum_{i=1}^{m} e_i(x)^2,$$

2. *minimizzazione del massimo valore assoluto dell'errore*

$$\min \max_{1 \le i \le m} |e_i(x)|.$$

3. *minimizzazione della somma dei valore assoluto dell'errore*

$$\min \sum_{i=1}^{m} |e_i(x)|.$$

Si tratta di problemi di ottimizzazione non vincolata. Osserviamo che nel caso 1, la funzione obiettivo é quadratica nelle incognite x (si veda l'esempio 6.5.2). I problemi del tipo 2 e 3 hanno funzione obiettivo che non è continuamente differenziabile. Nel paragrafo 3.3.4 si vedrà che problemi del tipo 2 e 3 possono essere ricondotti a problemi di programmazione lineare.

A titolo di esempio numerico sia $\phi(t),\ t \in R$ una funzione nota sperimentalmente che assume i valori seguenti:

t	0	1	2	3
$\Phi(t)$	0	1	4	9

Si vuole approssimare la funzione $y = \phi(t)$ con un polinomio di primo grado (ovvero una retta) del tipo $y = x_1 t + x_0$ in cui x_0, x_1 sono le incognite. Si definiscono gli errori

$$e_i(x_i) = y_i - (x_1 t_i + x_0), \quad i = 1, \ldots, 4.$$

I tre problemi diventano:

$$\min_x \left[x_0^2 + (x_1 + x_0 - 1)^2 + (2x_1 + x_0 - 4)^2 + (3x_1 + x_0 - 9)^2\right]$$

$$\min_x \max \left\{|x_0|, |x_1 + x_0 - 1|, |2x_1 + x_0 - 4|, |3x_1 + x_0 - 9|\right\}$$

$$\min_x \left[|x_0| + |x_1 + x_0 - 1| + |2x_1 + x_0 - 4| + |3x_1 + x_0 - 9|\right]$$

$\square$