Capitolo 5

Problemi di ottimizzazione convessa e concava

Tra i problemi di Ottimizzazione sono di particolare interesse i cosiddetti problemi *convessi*. Per poter definire correttamente cosa si intende per problema convesso è necessario introdurre alcuni concetti preliminari.

5.1 Insiemi Convessi

Definizione 5.1.1 *Un vettore y in $\mathbb{R}^n$ si dice* combinazione convessa *di $p \geq 1$ vettori $x^1, \ldots, x^p$ se risulta*

$$y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \qquad \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, p.$$

Possiamo allora introdurre la seguente definizione

Definizione 5.1.2 *Siano x e y due punti in $\mathbb{R}^n$. L'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ ottenuti come*

$$z = (1-\beta)x + \beta y,$$

al variare di β nell'intervallo $[0,1]$ viene definito come segmento chiuso *di estremi x e y e viene sinteticamente indicato con $[x,y]$.*

Esempio 5.1.3 Nella figura 5.1 è rappresentato il segmento in $\mathbb{R}^2$ avente per estremi i punti $x = (1,1)^T$ e $y = (8,5)^T$. Per $\beta = 0$ ritroviamo il punto x, mentre per $\beta = 1$ ritroviamo il punto y; i punti segnati nella figura come x_a, x_b e x_c corrispondono rispettivamente a valori di β pari a 0.25, 0.5 e 0.75.

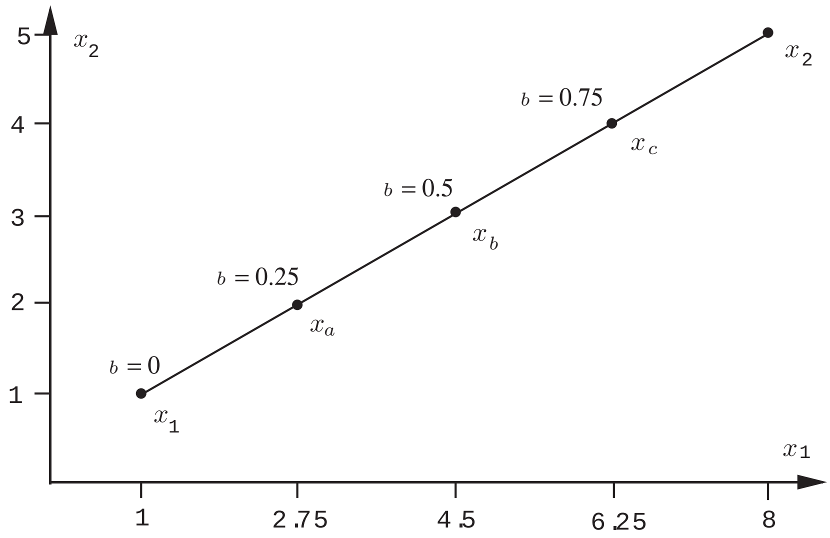

Figura 5.1: Esempio di segmento.

Dalla figura 5.1 risulta ovvio che il concetto di segmento è la generalizzazione, al caso di $\mathbb{R}^n$ dell' usuale concetto di segmento valido nel piano.

Notiamo anche come, nel caso in cui gli estremi appartengano ad $\mathbb{R}^1$, e sono quindi due numeri (scalari), diciamo a e b, il concetto di segmento di estremi a e b coincida con quello di intervallo $[a, b]$, fatto che giustifica la notazione $[x, y]$ impiegata per indicare il segmento.

Definizione 5.1.4 *Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è* convesso *se per ogni coppia di punti appartenenti all'insieme, appartengono all'insieme anche tutti i vettori ottenibili come loro combinazione convessa.*

Utilizzando il concetto di segmento chiuso, la definizione di insieme convesso può essere riformulata nel modo seguente:

Un insieme X è convesso se per ogni coppia di vettori $x, y \in X$ si ha $[x, y] \subseteq X$.

Dalla definizione segue che l'insieme vuoto e l'insieme costituito da un solo vettore sono insiemi convessi (banali). Il più semplice insieme convesso non banale è il *segmento* di estremi $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Esempio 5.1.5 In $\mathbb{R}^2$ gli insiemi (a) , (b) della figura 5.2 sono convessi, mentre gli insiemi (c), (d) della stessa figura non lo sono. Infatti agli insiemi (c),(d) appartengono coppie di punti, quali quelle segnate nella figura, tali che il segmento che li congiunge presenta dei punti non appartenenti all'insieme; ciò non avviene invece comunque si prendano coppie di punti negli insiemi (a) e (b).

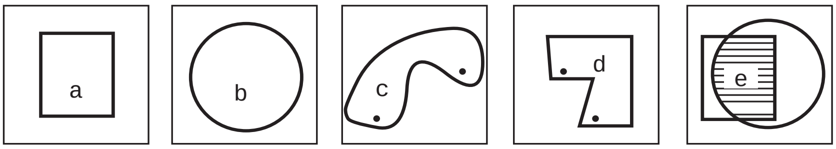

Figura 5.2: Insiemi convessi e non convessi.

Una importante proprietà degli insiemi convessi è espressa dal seguente teorema.

Teorema 5.1.6 *L'intersezione di due insiemi convessi è un insieme convesso.*

Dimostrazione: Siano $X_1, X_2 \subseteq I\!R^n$ due insiemi convessi e sia $X = X_1 \cap X_2$ la loro intersezione. Siano x ed y due vettori in X, allora $x, y \in X_1$ ed $x, y \in X_2$. Poiché X_1 ed X_2 sono insiemi convessi abbiamo che $[x, y] \subseteq X_1$ e che $[x, y] \subseteq X_2$. Ma allora $[x, y] \subseteq X$ e l'insieme X è convesso □

Esempio 5.1.7 L'insieme (e) della figura 5.2 è dato dall'intersezione di due insiemi convessi ed è convesso

Dal Teorema (5.1.6) si può derivare, con un semplice ragionamento induttivo, il seguente corollario.

Corollario 5.1.8 *L'intersezione di un numero finito di insiemi convessi è un insieme convesso.*

Passiamo ora a considerare dei particolari insiemi convessi che rivestono un ruolo importante nella teoria della programmazione lineare.
Consideriamo l'espressione

$$a_1x_1 + \quad \ldots \quad + a_nx_n = b$$

che, con notazione vettoriale possiamo scrivere $a^T x = b$, con $a \in I\!R^n$ e $b \in I\!R$. Possiamo allora dare le seguenti definizioni.

Definizione 5.1.9 *Sia a un vettore di $I\!R^n$ e b un numero reale. L'insieme*

$$H = \{x \in I\!R^n : a^T x = b\}$$

è detto iperpiano definito dall'equazione $a^T x = b$. Gli insiemi

$$\begin{aligned} S^{\leq} &= \{x \in I\!R^n : a^T x \leq b\} \\ S^{\geq} &= \{x \in I\!R^n : a^T x \geq b\} \end{aligned}$$

sono detti semispazi chiusi definiti dalle disequazioni $a^T x \leq b$ e $a^T x \geq b$.

Nel caso dello spazio $I\!R^2$ il concetto di iperpiano coincide con quello di retta, mentre nel caso dello spazio $I\!R^3$ il concetto di iperpiano coincide con quello di piano. In maniera intuitiva, i semispazi possono essere pensati come l' insieme dei punti che "giacciono" da una stessa parte rispetto all'iperpiano.

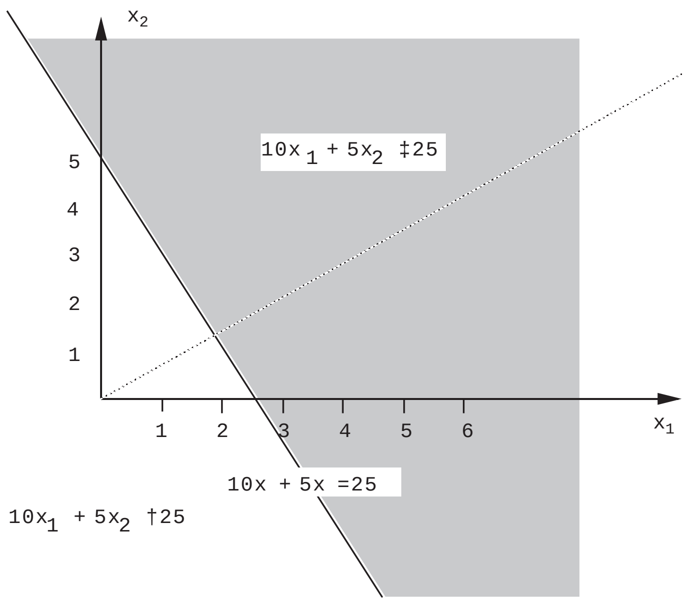

Figura 5.3: Retta e semipiani individuati da un'equazione lineare.

Esempio 5.1.10 Con riferimento alla figura 5.3, l'iperpiano (= retta) $10x_1 + 5x_2 = 25$ divide lo spazio (= piano) in due semispazi: $S^{\geq} = \{x \in I\!R^2 : 10x_1 + 5x_2 \geq 25\}$, indicato in grigio nella figura, e $S^{\leq} = \{x \in I\!R^2 : 10x_1 + 5x_2 \leq 25\}$, indicato in bianco nella figura.

Notiamo che l'iperpiano H fa parte di tutti e due i semispazi e che l'intersezione dei due semispazi coincide con l'iperpiano. In termini insiemistici abbiamo che

$$H \subset S^{\geq}, \qquad H \subset S^{\leq}, \qquad S^{\geq} \cap S^{\leq} = H.$$

I semispazi e gli iperpiani sono insiemi convessi.

Teorema 5.1.11 *Un semispazio chiuso è un insieme convesso.*

Dimostrazione: Dimostreremo il teorema per un semispazio $S^{\leq} = \{x \in I\!R^n : a^T x \leq b\}$, la dimostrazione per il semispazio $S^{\geq}$ ottenuto invertendo il verso della disequazione è analoga. Consideriamo due generici vettori x ed y appartenenti ad $S^{\leq}$, vogliamo dimostrare che ogni vettore $z \in [x, y]$ appartiene ad $S^{\leq}$, ovvero soddisfa la relazione $a^T z \leq b$.

Sia $z = \beta x + (1 - \beta)y$ con $0 \leq \beta \leq 1$. Poiché x ed y appartengono ad $S^{\leq}$ abbiamo che $a^T x \leq b$ e $a^T y \leq b$. Inoltre, poiché β ed $1 - \beta$ sono reali non negativi abbiamo che

$$a^T(\beta x + (1 - \beta)y) = \beta a^T x + (1 - \beta)a^T y \leq \beta b + (1 - \beta)b = b$$

e quindi che $a^T z \leq b$ $\square$

Utilizzando il Teorema (5.1.11) e il Teorema (5.1.6) e ora facile dimostrare che anche un iperpiano è un insieme convesso.

Corollario 5.1.12 *Un iperpiano è un insieme convesso.*

Dimostrazione: Un iperpiano è l'intersezione di due semispazi chiusi ($S^{\leq}$ e $S^{\geq}$). Per il Teorema (5.1.11) un semispazio chiuso è un insieme convesso mentre, per il Teorema (5.1.6), l'intersezione di due insiemi convessi è un insieme convesso. □

5.1.1 Poliedro e punti estremi di un insieme convesso

In particolare è usuale introdurre la seguente definizione:

Definizione 5.1.13 *Un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un* poliedro *se è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi e iperpiani.*

In $\mathbb{R}^3$ possibili poliedri sono i cubi, i tetraedi ecc. In R^2 sono poliedri, ad esempio, i segmenti, le rette, poligoni piani, ecc.

Naturalmente, risulta:

Un poliedro è un insieme convesso.

Introduciamo ora il concetto di *punto estremo*, che ha un ruolo molto importante nello studio dei problemi di Programmazione lineare.

Definizione 5.1.14 (Punto estremo) *Sia $C \subseteq R^n$ un insieme convesso. Un punto $x \in C$ si dice* punto estremo *di C se* non *può essere espresso come combinazione convessa di due punti di C distinti da x, o, equivalentemente, se non esistono $y, z \in C$ con $z \neq y$ tali che*

$$x = (1 - \lambda)y + \lambda z, \quad \text{con} \quad 0 < \lambda < 1.$$

Sono esempi di punti estremi: per un cerchio, i punti della circonferenza che lo delimita; per un segmento $[x_1, x_2]$, gli estremi x_1, x_2; per un triangolo, i suoi vertici (non sono punti estremi i punti dei lati che non siano vertici). L'insieme dei punti estremi di un insieme convesso C verrà indicato con il simbolo $\text{Ext}(C)$, ossia:

$$\text{Ext}(C) = \{x \in C : x \;\text{ è punto estremo di }\; C\}.$$

Un insieme convesso può non ammettere punti estremi. Ad esempio, un iperpiano, un semispazio, una sfera aperta non hanno punti estremi.

Osserviamo inoltre che $\text{Ext}(C)$ è contenuto nella frontiera di C e quindi nessun insieme convesso aperto può ammettere punti estremi.

Esempio 5.1.15 Nell'insieme di figura 5.4 il punto A non è un punto estremo, in quanto è interno al segmento che congiunge i punti B e C, anch'essi appartenenti all'insieme; lo stesso vale per il punto D, interno al segmento [E,F]. Sono invece punti estremi dell'insieme i punti E, F, G, H.

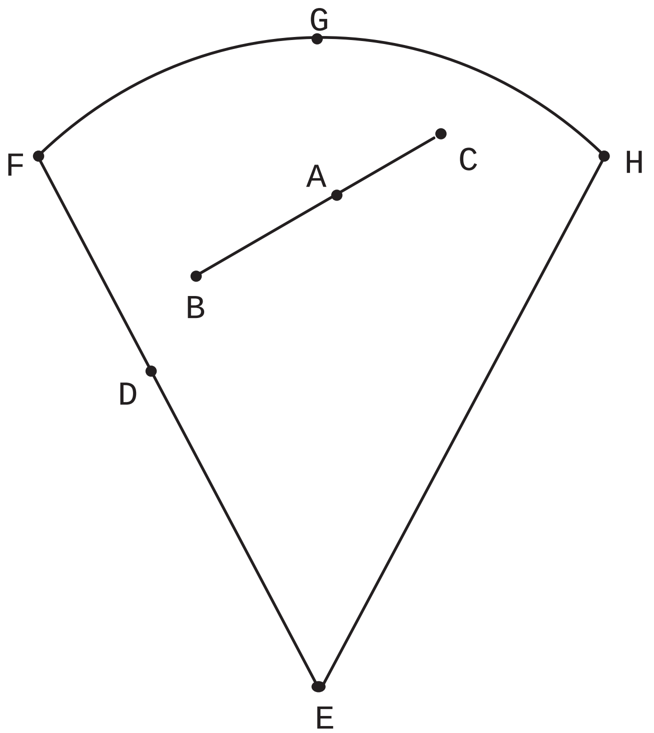

Figura 5.4: Punti estremi di un insieme.

Nel caso in cui l'insieme convesso sia un poliedro, i punti estremi sono detti anche *vertici*.[1]

5.2 Funzioni convesse e concave

Definizione 5.2.1 *Una funzione $f(x)$ si dice* convessa *su un insieme convesso $\mathcal{C}$ se, presi comunque due punti $y, z \in \mathcal{C}$ risulta che:*

$$f((1-\beta)y + \beta z) \leq (1-\beta)f(y) + \beta f(z), \quad \beta \in [0,1]. \tag{5.1}$$

La funzione $f(x)$ si dice poi strettamente convessa *se, per $y, z \in \mathcal{C}$, $y \neq z$,risulta*

$$f((1-\beta)y + \beta z) < (1-\beta)f(y) + \beta f(z), \quad \beta \in (0,1).$$

[1]In realtà la definizione di vertice è concettualmente diversa, ma si dimostra che un punto di un poliedro è punto estremo se e solo se è un vertice.

Definizione 5.2.2 *Una funzione $f(x)$ si dice* concava *su un insieme convesso $\mathcal{C}$ se, presi comunque due punti $y, z \in \mathcal{C}$ risulta che:*

$$f((1-\beta)y + \beta z) \geq (1-\beta)f(y) + \beta f(z), \quad \beta \in [0,1]. \tag{5.2}$$

La funzione $f(x)$ si dice poi strettamente concava *se, per $y, z \in \mathcal{C}$, $y \neq z$,risulta*

$$f((1-\beta)y + \beta z) > (1-\beta)f(y) + \beta f(z), \quad \beta \in (0,1).$$

Una funzione $f(x)$ si dice *(strettamente) concava* su un insieme convesso $\mathcal{C}$ se la funzione $-f(x)$ è (strettamente) convessa su $\mathcal{C}$.

Nella (5.1) $y, z, f(y), f(z)$ sono dati, e β varia tra 0 e 1. Se mettiamo in esplicita evidenza la dipendenza da β, introducendo la funzione

$$\phi(\beta) = f((1-\beta)y + \beta z)$$

otteniamo per una funzione strettamente convessa che:

$$\phi(\beta) < (1-\beta)\phi(0) + \beta\phi(1) \quad \beta \in (0,1)$$

Quest'ultima relazione mette in evidenza che, se si rappresenta graficamente nel piano (β, ϕ) la funzione $\phi(\beta)$, il grafico della funzione nell'intervallo $(0,1)$ si trova al di sotto del segmento, detto *secante*, che congiunge i punti $(0, \phi(0))$ e $(1, \phi(1))$ e coincide solo negli estremi del segmento. Si può concludere che una funzione strettamente convessa è caratterizzata dalla proprietà di avere il grafico sempre al di sotto di ogni sua secante.

Una funzione lineare del tipo $c^T x + b$ è sia convessa che concava (ma NON è strettamente convessa o strettamente concava).

5.3 Problemi di ottimizzazione

Dal punto di vista delle proprietà di convessità possiamo distinguere:

- problemi di programmazione convessa: sono i problemi di minimo in cui la funzione obiettivo è convessa e l'insieme ammissibile è un insieme convesso (o anche i problemi di massimo in cui la funzione obiettivo è concava e l'insieme ammissibile è convesso)
- problemi di programmazione concava: sono i problemi di minimo in cui la funzione obiettivo è concava e l'insieme ammissibile è un insieme convesso (o anche i problemi di massimo in cui la funzione obiettivo è convessa e l'insieme ammissibile è convesso)
- problemi generali, in cui non sono soddisfatte tali condizioni.

Riconoscere che un problema di ottimizzazione è convesso o concavo fornisce importanti informazioni qualitative sulle sue soluzioni. Osserviamo che

Una problema con insieme ammissibile convesso S e funzione obiettivo lineare è sia convesso che concavo.

e dunque

Una problema di Programmazione Lineare è sia convesso che concavo.

Esempio 5.3.1 Sia dato il problema

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 \\ & x_2 - x_1^3 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{array}$$

dire se è convesso.
Si tratta di un problema di massimo con funzione obiettivo lineare e quindi concava. L'insieme ammissibile è rappresentato in figura 5.5. Si tratta di un insieme convesso. Quindi il problema dato è convesso.

Notiamo che, poiché la funzione obiettivo è lineare, si tratta anche di un problema di massimizzazione di una funzione convessa su insieme convesso e cioè di un problema concavo !

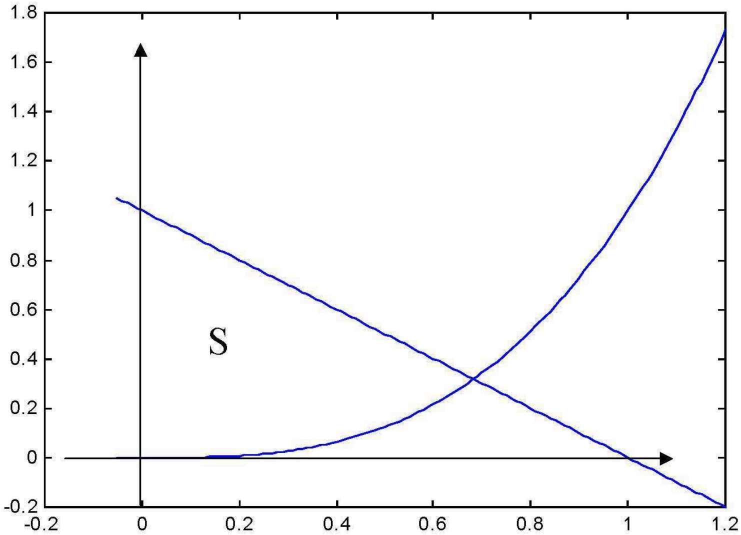

Figura 5.5: Insieme ammissibile S dell'Esempio 5.3.1

Per riconoscere se un problema generale è convesso o concavo dobbiamo verificare che S sia un insieme convesso, e che $f(x)$ sia convessa/concava su S, il che non è sempre facile. Consideriamo un insieme S definito da vincoli di uguaglianza e disuguaglianza:

$$\begin{array}{ll} g_i(x) \leq 0, & i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, & j = 1, \dots, p. \end{array} \tag{5.3}$$

Nel caso in cui g_i per $i = 1, \dots, m$ e h_j per $j = 1, \dots, p$ siano funzioni lineari, S è un poliedro e quindi un insieme convesso. Se invece qualche g_i o h_j è non lineare possiamo utilizzare la seguente proposizione fornisce una condizione solo sufficiente per la convessità di S.

Teorema 5.3.2 *Sia $g : R^n \to R$ e*

$$S = \{x \in R^n : g(x) \leq 0, \}.$$

Se la funzione $g(x)$ é convessa in $I\!R^n$, allora l'insieme S è convesso.

Dimostrazione. Siano y e z due punti appartenenti a S. Per la convessità di g si ha

$$g((1-\beta)y + \beta z) \leq (1-\beta)g(y) + \beta g(z) \quad \text{con } \beta \in [0,1],$$

Quindi poiché $g(y) \leq 0$ e $g(z) \leq 0$, si ottiene

$$g((1-\beta)y + \beta z) \leq 0 \quad \text{con } \beta \in [0,1],$$

Ovvero tutti i punti del segmento $[y, z]$ sono in S che dimostra che l'insieme S^i è convesso. □

É possibile quindi enunciare la seguente condizione sufficiente.

Teorema 5.3.3 *Sia*

$$S = \{x \in R^n : g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p\}.$$

Se per ogni i le funzioni $g_i(x)$ sono convesse in $I\!R^n$, e per ogni j le funzioni h_j sono funzioni del tipo $a_j^T x - b_j$, allora l'insieme S è convesso.

Dimostrazione. L'insieme ammissibile S è ottenuto come intersezione degli insiemi $S^i = \{x \in R^n : \ g_i(x) \leq 0\}$ e $H^j = \{x \in R^n : \ a_j^T x - b_j = 0\}$ che nelle ipotesi poste sono convessi per la proposizione 5.3.2 e per il Corollario 5.1.12. Il risultato segue dal Corollario 5.1.8. □

Otteniamo quindi la seguente condizione sufficiente per riconoscere se un problema è convesso o concavo.

Teorema 5.3.4 *Sia dato il Problema*

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p. \end{array} \tag{5.4}$$

Si assuma che i vincoli di disuguaglianza siano dati da funzioni $g_i(x)$ convesse in $I\!R^n$, e che i vincoli di uguaglianza siani dati da funzioni del tipo $a_j^T x - b_j$.
Se la funzione obiettivo $f(x)$ è una funzione convessa in $I\!R^n$, il Problema (5.4) è convesso.
Se la funzione obiettivo $f(x)$ è una funzione concava in $I\!R^n$, il Problema (5.4) è concavo.

Notiamo che, la condizione sufficiente del Teorema 5.3.3 non è soddisfatta nell'Esempio 5.3.1 a causa della non convessità del vincolo $x_1^3 - x_2 \leq 0$. □

5.3.1 Problema di ottimizzazione convesso

I problemi di ottimizzazione convessi sono di particolare importanza per due motivi. Il primo è che la grande maggioranza dei problemi di ottimizzazione che si incontrano nella pratica sono convessi. Il secondo è che la convessità induce alcune proprietà che semplificano l'analisi e la soluzione di un problema convesso.

Una delle proprietà più significative è la seguente:

Teorema 5.3.5 **[Assenza di ottimi locali]** *Sia $S \subseteq R^n$ un insieme convesso e f una funzione convessa su S. Allora, il problema*

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & x \in S \end{array}$$

o non ha soluzione, o ha solo soluzioni globali; non può avere soluzioni esclusivamente locali.

Dimostrazione. La dimostrazione è per assurdo. Ammettiamo che esista un minimo globale x^* e che $\hat{x}$ sia una soluzione locale, ma non globale, di $min_{x \in S} f(x)$. Allora risulta $f(x^*) < f(\hat{x})$.

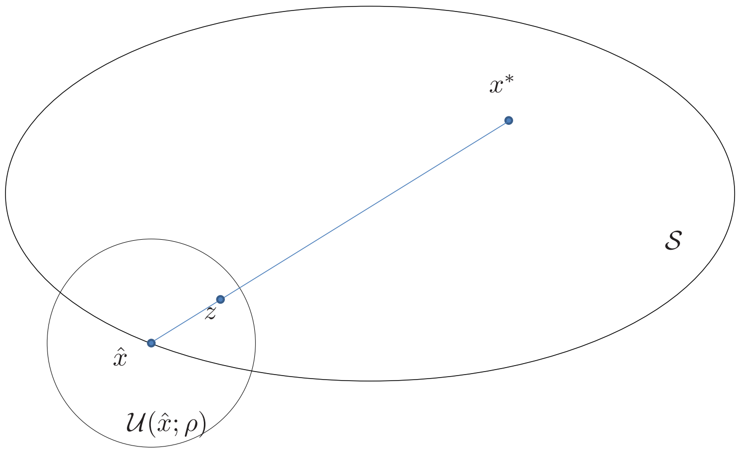

Figura 5.6: Costruzione geometrica utilizzata nella dimostrazione del Teorema 5.3.5

La costruzione utilizzata nella dimostrazione è illustrata schematicamente nella figura 5.6. Consideriamo il segmento $[\hat{x}, x^*]$: per la convessità di f, si ha:

$$f((1-\beta)\hat{x} + \beta x^*) \leq (1-\beta) f(\hat{x}) + \beta f(x^*) = f(\hat{x}) + \beta(f(x^*) - f(\hat{x})), \text{per ogni } \beta \in [0, 1].$$

Il termine $\beta(f(x^*) - f(\hat{x}))$ risulta < 0, per ogni $\beta \in (0, 1]$, e si annulla solo per $\beta = 0$. Quindi, poichè in ogni punto $x \in (\hat{x}, x^*]$ risulta $f(z) < f(\hat{x})$, non esiste nessun intorno di raggio $\rho > 0$ in cui $\hat{x}$ può soddisfare la definizione di minimo locale. $\square$

5.3.2 Problema di ottimizzazione concavo

I problemi di programmazione concava costituiscono una classe molto ampia di problemi non convessi, che include numerose classi di problemi inerentemente "difficili". La difficoltà principale che si manifesta nella soluzione di problemi di tipo concavo risiede nel fatto che possono esssere presenti molti punti di minimo locale che non sono punti di minimo globale. In casi del genere la ricerca delle soluzioni globali può divenire un problema di natura combinatoria, che può richiedere, nel caso peggiore, tempi di calcolo esponenzialmente crescenti con le dimensioni del problema (È possibile dimostrare, in particolare, che, sotto opportune ipotesi, molti problemi di ottimizzazione combinatoria possono essere riformulati come problemi (continui) di programmazione concava.).

Per i problemi di programmazione concava è possibile dimostrare che le soluzioni ottime, ove esistano, appartengono alla frontiera dell'insieme ammissibile. Più precisamente vale il risultato seguente.

Teorema 5.3.6 [Assenza di soluzioni ottime interne] *Sia $S \subseteq R^n$ un insieme convesso e f una funzione concava su S. Allora, se esiste un punto di minimo globale del problema*

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & x \in S \end{array}$$

e se la funzione obiettivo non è costante su S, ogni punto di minimo globale appartiene alla frontiera di S.

Dimostrazione. Supponiamo che il problema ammetta soluzione e che x^* sia una soluzione ottima. Poichè, per ipotesi, f non è costante su S deve esistere un punto $\hat{x} \in S$ tale che

$$f(\hat{x}) > f(x^*) = \min_{x \in S} f(x).$$

Supponiamo ora che $z \in S$ sia un punto interno all'insieme ammissibile. Deve allora esistere una sfera aperta $B(z;\rho)$ con centro in z e raggio $\rho > 0$ tutta contenuta in S. Sulla retta congiungente $\hat{x}$ con z possiamo allora determinare un $y \in B(z;\rho) \subseteq S$ tale che z appartenga al segmento $[\hat{x}, y]$ e risulti $y \neq z$, ossia possiamo trovare un λ con $0 \leq \lambda < 1$ tale che

$$z = (1-\lambda)\hat{x} + \lambda y.$$

Per la concavità di f e l'ipotesi che sia $f(\hat{x}) > f(x^*)$, tenendo conto del fatto che $f(y) \geq f(x^*)$ e che $1 - \lambda > 0$ (perchè $y \neq z$), si ottiene:

$$f(z) \geq (1-\lambda)f(\hat{x}) + \lambda f(y) > (1-\lambda)f(x^*) + \lambda f(x^*) = f(x^*).$$

Ciò dimostra che $f(z) > f(x^*)$ e quindi che non può esistere una soluzione ottima in un punto interno. □

Per quanto riguarda la Programmazione Lineare, poiché si tratta di un problema sia convesso che concavo, abbiamo, come immediata conseguenza, il seguente corollario

Corollario 5.3.7 *Se un problema di Programmazione Lineare ammette soluzione, allora il minimo globale si trova sulla frontiera del poliedro ammissibile.*

Nel seguito vedremo che nel caso in cui l'insieme ammissibile sia un poliedro, vale una proprietà più forte. In particolare, nel caso di problemi di Programmazione Lineare (Capitolo 10), almeno un punto di minimo globale deve trovarsi su un vertice del poliedro ammissibile.

5.4 Caratterizzazione funzioni convesse continuamente differenziabili

Se f è una funzione convessa differenziabile possiamo dare condizioni necessarie e sufficienti di convessità espresse per mezzo delle derivate prime o seconde dalla funzione. Ci limitiamo a riportare i risultati seguenti.

Teorema 5.4.1 (Condizioni necessarie e sufficienti di convessità) *Sia C un insieme convesso aperto, sia $f : C \to R$ e supponiamo che ∇f sia continuo su C. Allora f è convessa su C se e solo se, per tutte le coppie di punti $x, y \in C$ si ha:*

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x). \tag{5.5}$$

Inoltre f è strettamente convessa su C se e solo se, per tutte le coppie di punti $x, y \in C$ con $y \neq x$, si ha:

$$f(y) > f(x) + \nabla f(x)^T (y - x). \tag{5.6}$$

Dal punto di vista geometrico, la condizione del teorema precedente esprime il fatto che una funzione è convessa su C se e solo se in un qualsiasi punto $y \in C$ l'ordinata $f(y)$ della funzione non è inferiore alle ordinate dei punti del piano tangente al grafo della funzione in un qualsiasi altro punto x di C.

Nel teorema successivo riportiamo una condizione necessaria e sufficiente di convessità espressa per mezzo delle derivate seconde.

Teorema 5.4.2 (Condizioni necessarie e sufficienti di convessità) *Sia C un insieme convesso aperto, sia $f : C \to R$ e supponiamo che la matrice Hessiana $\nabla^2 f$ sia continua su C. Allora f è convessa su C se e solo se, per ogni $x \in C$, la matrice $\nabla^2 f(x)$ è semidefinita positiva.*

Se si prendono in considerazione le derivate seconde, non è vero, in generale, che una condizione necessaria di convessità stretta è la definita positività della matrice Hessiana (basti pensare alla funzione $y = x^4$ in $x = 0$). Si può stabilire tuttavia che se la matrice Hessiana è definita positiva allora f è strettamente convessa.

Teorema 5.4.3 (Condizione sufficiente di convessità stretta) *Sia C un insieme convesso aperto, sia $f : C \to R$ e supponiamo che la matrice Hessiana $\nabla^2 f$ sia continua e definita positiva su C. Allora f è strettamente convessa su C.*

5.4.1 Funzioni e forme quadratiche

Tra le funzioni di particolare interesse in problemi di Programmazione Matematica ci sono le funzioni quadratiche. Una *funzione quadratica* è una funzione del tipo

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T A x + c^T x,$$

dove A è una matrice quadrata e simmetrica di dimensione $(n \times n)$, con elementi $a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1, \ldots, n$. Il gradiente e la matrice hessiana sono

$$\nabla f(x) = Ax \qquad\qquad \nabla^2 f(x) = A.$$

Data una matrice A si definisce *forma quadratica* associata alla matrice A la funzione

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j. \tag{5.7}$$

Una forma quadratica è quindi una particolare funzione quadratica in cui il termine lineare è identicamente nullo ($c = 0$).

Si verifica facilmente che il gradiente e l'Hessiano della forma quadratica sono dati rispettivamente da $2Ax$ e $2A$.

La forma quadratica $x^T Ax$ si dice:

- *definita positiva*, se risulta $x^T Ax > 0 \ \forall x \in I\!R^n, x \neq 0$;
- *semidefinita positiva* se risulta $x^T Ax \geq 0 \ \forall x \in I\!R^n$;
- *indefinita* se per qualche x risulta $x^T Ax > 0$, e per altri x risulta $x^T Ax < 0$.

Corrispondentemente, si dice che la matrice A associata alla forma quadratica è rispettivamente definita positiva, semidefinita positiva, indefinita.

La forma quadratica $x^T Ax$ si dice (semi)definita negativa se $-x^T Ax$ è (semi)definita positiva.

Nel caso di funzioni quadratiche, la matrice hessiana A è costante e la condizione di convessità dei Teoremi 5.4.2 e 5.4.3 diventa:

Teorema 5.4.4 *Una funzione quadratica $q(x)$ è convessa su $I\!R^n$ se, e solo se, risulta:*

$$\frac{1}{2}y^T Ay \geq 0, \quad \text{per ogni } y \in I\!R^n;$$

inoltre, la funzione $q(x)$ è strettamente convessa su $I\!R^n$ se e solo se risulta

$$\frac{1}{2}y^T Ay > 0, \quad \text{per ogni } y \in I\!R^n.$$

Notare che nel caso di funzione quadratica la condizione di stretta convessità è condizione necessaria e sufficiente.

Per verificare se una matrice A è definita positiva, si può utilizzare un semplice test.

Criterio 1 *Siano $A_k, k = 1\ldots, n$ gli n minori principali della matrice A, detti* sottomatrici principali di nord-ovest*, cioè le n sottomatrici con elementi $a_{ij}, i, j = 1, \ldots, k$,ottenute da A eliminando le ultime $n-k$ righe e colonne. Denotato con $\det A_k$ il determinante di A_k, risulta che:*

- *A è definita positiva se, e solo se, $\det A_k > 0$, per $k = 1, \ldots, n$.*

Si osserva che se A è semidefinita positiva allora risulta $\det A_k \geq 0$, ma non è vero in generale il viceversa. Basta prendere come esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a_{22} \end{pmatrix}$$

con $a_{22} < 0$ e la forma quadratica associata

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

in cui $a_{11} = a_{12} = 0$. I minori principali A_1 e A_2 hanno determinante nullo, e quindi soddisfano il criterio $\det A_k \geq 0$, ma $q(x)$ è semidefinita negativa !!!

Per verificare se una matrice $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ è semidefinita positiva si deve applicare un criterio molto più oneroso riportato di seguito. Sia $J^k = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ e si consideri la sottomatrice quadrata $D_{J^kJ^k}$ di dimensione $|J^k| \times |J^k|$ ottenuta da A eliminando la riga e colonna h-esima per ogni $h \notin J^k$. Queste sottomatrici si chiamano *minori principali* di A. Dunque $D_{J^kJ^k} = \{a_{ij}\}_{i=i_1,\dots,i_k,\ j=i_1,\dots,i_k}$

Criterio 2 *Denotato con* $\det D_{i_k,j_k}$ *il determinante di* $D_{J^kJ^k}$*, si ha:*

- *A è semidefinita positiva se, e solo se, $D_{J^kJ^k} \geq 0$ per ogni $J^k \subset \{1, \dots, n\}$.*

Osserviamo che il criterio fornisce delle condizioni sufficienti di NON convessitá. In particolare, data una matrice A quadrata e simmetrica, se risulta $a_{ii} < 0$ per qualche $i = 1, \dots, n$ allora la matrice NON è semidefinita posiitva (né dunque definita positiva). Analogamente se risulta

$$\det D_{i_k,j_k} < 0$$

per un qualunque minore principale allora la matrice NON è semidefinita posiitva.

Per analizzare se una matrice A è definita/semidefinita negativa si possono applicare i criteri precedenti alla matrice $-A$ associata alla forma quadratica.

Un altro test per verificare il segno di una forma quadratica consiste nel determinare gli *autovalori* della matrice A, cioe' i valori $\alpha_i,\ i = 1, \dots, n$ che risolvono l'equazione di grado n:

$$\det(A - \alpha I) = 0,$$

ove I è la matrice identica di ordine n. Se la matrice A è simmetrica, si ha che gli autovalori sono tutti reali. Risulta che:

- A è definita positiva se, e solo se, $\alpha_i > 0$, per $i = 1, \dots, n$;
- A è semidefinita positiva se, e solo se, $\alpha_i \geq 0$ per $i = 1, \dots, n$;
- A è indefinita, altrimenti.

È evidente che il test basato sui minori è di più semplice impiego di quello basato sugli autovalori: infatti calcolare determinanti, fino all'ordine n, è piu' semplice che risolvere un'equazione di grado n.

Nel seguito indicheremo $\alpha_{\min}(A)$ e $\alpha_{\max}(A)$ rispettivamente il più piccolo e il più grande autovalore di una matrice A.

Esempio 5.4.5 Un esempio di funzione quadratica strettamente convessa è la funzione

$$4x_1^2 + 8x_2^2 - x_1$$

rappresentata in figura 5.7.

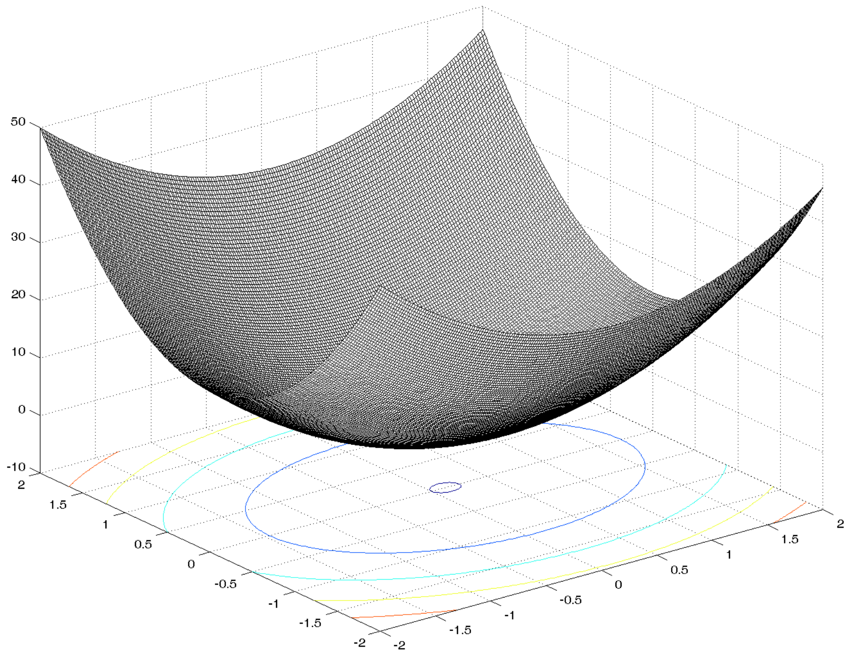

Figura 5.7: Grafico della funzione quadratica convessa Dell'Esempio 5.4.5.