Capitolo 7

Teoremi dell'alternativa

7.1 Introduzione

Nel capitolo 6, le condizioni di ottimo per problemi con vincoli lineari sono state formulate come "NON esistenza" di soluzione di un sistema di equazioni e disequazioni lineari. Tali condizioni possono essere riscritte come condizioni di esistenza di soluzioni di un diverso sistema di equazioni e disequazioni lineare. A tale scopo si utilizzano i cosìdetti teorema dell'alternativa. I teoremi dell'alternativa consentono di ridurre il problema della *non esistenza* di soluzioni di un sistema di equazioni e disequazioni lineari assegnato a quello dell'*esistenza* di soluzioni di un altro sistema lineare.

Un risultato di alternativa relativo a due assegnati sistemi lineari (I) e (II), consiste nel dimostrare che:

Il sistema (I) ha soluzione se e solo se il sistema (II) non ha soluzione.

7.2 Il Lemma di Farkas

Tra i teoremi di alternativa per i sistemi di disequazioni lineari, uno dei più noti, e anche quello che utilizzeremo nei prossimi capitoli, è il *Lemma di Farkas* che si può enunciare nella forma seguente.

Teorema 7.2.1 (Lemma di Farkas) *Sia B matrice $p \times n$ e $g \in I\!R^n$. Il sistema*

$$Bd \geq 0 \qquad g^T d < 0 \tag{I}$$

non ha soluzione $d \in I\!R^n$ *se e solo se il sistema*

$$B^T u = g \qquad u \geq 0 \tag{II}$$

ha soluzione $u \in I\!R^p$.

Dimostrazione. [(II) ha soluzione $\longrightarrow$ (I) non ha soluzione.] Sia $\bar{d}$ soluzione del sistema (I) e supponiamo per assurdo che esista una soluzione $\bar{u}$ del sistema (II), ovvero che la coppia $\bar{u}, \bar{d}$ soddisfi:

$$\begin{array}{ll} B\bar{d} \geq 0 & g^T\bar{d} < 0, \\ B^T\bar{u} = g & \bar{u} \geq 0. \end{array}$$

Allora si può scrivere:

$$B\bar{d} \geq 0 \overset{\bar{u}\geq 0}{\Longrightarrow} \bar{u}^T B\bar{d} \geq 0 \overset{B^T\bar{u}=g}{\Longrightarrow} g^T\bar{d} \geq 0,$$

che contraddice l'ipotesi che $\bar{d}$ soddisfi $g^T\bar{d} < 0$.

[(I) non ha soluzione $\longrightarrow$ (II) ha soluzione.] La dimostrazione di questa implicazione è in due parti. Si dimostra preliminarmente che se (I) non ha soluzione allora esiste un vettore $u \in R^p$ tale ch $B^T u = g$. Successivamente dimostreremo che $u \geq 0$.
Se (I) non ha soluzione, allora in particolare non esiste una soluzione nemmeno al sistema di equazioni lineari

$$Bd = 0 \qquad g^T d = -1 \qquad [(I)eq].$$

Il sistema [(I)eq] si può scrivere in forma matriciale come segue:

$$\begin{pmatrix} B \\ g^T \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

È noto che tale sistema non ha soluzione se e solo se

$$\text{rango}\begin{pmatrix} B \\ g^T \end{pmatrix} \neq \text{rango}\begin{pmatrix} B & 0 \\ g^T & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi se:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} B & 0 \\ g^T & -1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} B \\ g^T \end{pmatrix} + 1. \tag{7.1}$$

D'altra parte, l'ultima riga $(g^T \ \ -1)$ è linearmente indipendente dalle righe di $(B\ 0)$ e quindi:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} B & 0 \\ g^T & 1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} B & 0 \end{pmatrix} + 1 = \text{rango}(B) + 1. \tag{7.2}$$

Dalle (7.1) (7.2), tenendo conto del fatto che il rango di una matrice è eguale al rango della trasposta, si ottiene

$$\text{rango}\begin{pmatrix} B^T & g \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} B \\ g^T \end{pmatrix} = \text{rango}(B)$$

e ciò implica che il sistema $B^T u = g$ ha soluzione, ovvero esiste una rappresentazione di g del tipo:

$$g = \sum_{i=1}^{p} u_i b_i. \tag{7.3}$$

Dimostriamo ora che $u \geq 0$.

La dimostrazione è per induzione sul numero di disequazioni che compongono il sistema, ovvero sul numero di righe p della matrice B.

Dimostriamo innanzitutto che la tesi è vera per $p = 1$ e quindi supponiamo che

$$\nexists\, d \in R: \qquad g^T d < 0,\ b_1^T d \geq 0.$$

Quindi per la (7.3) risulta $g = ub_1$ con $u \in R$. Se $c = 0$, il risultato è ovvio in quanto si può assumere $u = 0$. Se $c \neq 0$ deve anche essere $b_1 \neq 0$ e possiamo considerare il vettore $\bar{d} = b_1 \neq 0$. Ne segue che $b_1^T \bar{d} = \|b_1\|^2 > 0$ e quindi, per ipotesi, deve risultare $c^T \bar{d} \geq 0$. Si ottiene quindi

$$g^T \bar{d} = (ub_1)^T (b_1) = u\|b_1\|^2 \geq 0,$$

che implica $u \geq 0$.

Supponiamo ora che il risultato sia vero per una matrice con $p-1$ righe e dimostriamo che vale per una matrice con p righe. Quindi supponiamo che:

$$\text{non esista } d \in R^n \text{ tale che } Bd \geq 0,\ g^T d < 0 \tag{7.4}$$

con B matrice $p \times n$.

Sappiamo che esiste $u \in R^p$ tale che vale la (7.3). Tra tutti i possibili u per cui vale la (7.3) determiniamo un vettore $\bar{u}$ con il massimo numero di componenti non negative e indichiamo con s il numero di componenti non negative di $\bar{u}$. Riordiniamo le componenti di $\bar{u}$ e conseguentemente le colonne di B in modo che le componenti non negative siano le prime s, ovvero risulti

$$\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_s \geq 0, \qquad \bar{u}_{s+1}, \ldots, \bar{u}_p < 0.$$

Allora possiamo scrivere

$$g = \sum_{i=1}^{s} \bar{u}_i b_i + \sum_{i=s+1}^{p-1} \bar{u}_i b_i + \bar{u}_p b_p.$$

Si tratta di dimostrare che deve essere $s = p$. Per assurdo supponiamo che $s < p$.
Possiamo scrivere

$$g = \hat{g} + \sum_{i=s+1}^{m-1} \bar{u}_i b_i, \tag{7.5}$$

avendo posto

$$\hat{g} = \sum_{i=1}^{s} \bar{u}_i b_i + \bar{u}_p b_p \tag{7.6}$$

La dimostrazione procede in due passi principali. Si dimostra inizialmente che

[Affermazione 1] Se $\nexists\ d \in R^n : \begin{array}{l} Bd \geq 0 \\ c^T d < 0 \end{array} \implies \nexists\, d \in R^n : \begin{array}{l} Bd \geq 0 \\ \hat{g}^T d < 0 \end{array}$

Successivamente che

[Affermazione 2]

Se $\nexists\, d \in R^n : \begin{array}{l} Bd \geq 0 \\ \hat{g}^T d < 0 \end{array} \implies \nexists\ d \in R^n : \begin{array}{l} b_i^T d \geq 0, \quad i = 1, \ldots, p-1, \\ \hat{g}^T d < 0. \end{array}$

Se [Affermazione 1] e [Affermazione 2] sono vere, come conseguenza dell'ipotesi 7.4, si ha che

$$\nexists\ d \in R^n \text{ tale che } b_i^T d \geq 0 \quad i = 1, \dots, p-1 \quad \hat{g}^T d < 0. \tag{7.7}$$

Ma poiché il sistema (7.7) è di dimensione $p-1$, soddisfa l'ipotesi induttiva e quindi esiste un $\hat{u} \in R^{p-1}$ tale che

$$\hat{g} = \sum_{i=1}^{p-1} \hat{u}_i b_i, \quad \hat{u}_i \geq 0, \ i = 1, \dots, p-1.$$

Sostituendo questa espressione di $\hat{g}$ nella definizione (7.6) di c, si ottiene:

$$\begin{aligned} g = & \ \hat{g} + \sum_{i=s+1}^{p-1} \bar{u}_i b_i = \sum_{i=1}^{p-1} \hat{u}_i b_i + \sum_{i=s+1}^{m-1} \bar{u}_i b_i \\ = & \sum_{i=1}^{s} \hat{u}_i b_i + \sum_{i=s+1}^{p-1} (\bar{u}_i + \hat{u}_i) b_i \\ = & \sum_{i=1}^{s} \hat{u}_i b_i + \sum_{i=s+1}^{p-1} (\bar{u}_i + \hat{u}_i) b_i + 0 \cdot b_p \end{aligned}$$

Quindi c risulta essere la combinazione lineare dei vettori b_i con $s+1$ coefficienti non negativi $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_s, \hat{u}_p = 0$. Ma questo è assurdo perché per ipotesi avevamo supposto che s fosse il massimo numero di coefficienti non negativi nella definizione di g.

Si tratta quindi di dimostrare che valgono le [Affermazione 1] e [Affermazione 2].

Dimostrazione [Affermazione 1]. Sia d tale che $Bd \geq 0$, e quindi, per ipotesi $g^T d \geq 0$; moltiplicando scalarmente la (7.5) per d si ottiene

$$0 \leq g^T d = \hat{g}^T d + \sum_{i=s+1}^{p-1} \bar{u}_i \overbrace{b_i^T d}^{\geq 0} \quad \text{per ogni } d: \ b_i' d \geq 0 \quad i = 1, \dots, p.$$

Poiché $\bar{u}_{s+1}, \dots, \bar{u}_{p-1} < 0$, la $\sum_{i=s+1}^{p-1} \bar{u}_i b_i^T d \leq 0$ e quindi deve essere necessariamente:

$$\hat{g}^T d \geq 0 \quad \text{per ogni } d: \ Bd \geq 0.$$

L'[Affermazione 1] è cosí dimostrata.

Dimostrazione [Affermazione 2]. Per definizione (7.6), $\hat{g}$ è la combinazione lineare dei vettori b_i con coefficienti $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_s, 0, \dots, 0, \bar{u}_p$ tutti non negativi tranne l'ultimo $\bar{u}_p$. La dimostrazione è per assurdo, quindi supponiamo che non sia vera, cioè che esista $\bar{d} \in R^n$ tale che $b_i^T \bar{d} \geq 0$ per $i = 1, \dots, p-1$ e $\hat{g}^T \bar{d} < 0$. Per definizione di $\hat{g}$ possiamo scrivere

$$\hat{g}^T \bar{d} = \sum_{i=1}^{s} \bar{u}_i b_i^T \bar{d} + \bar{u}_p b_p^T \bar{d}.$$

Se $b_i^T \bar{d} \geq 0$ per $i = 1, \dots, p-1$, allora $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} \bar{u}_i b_i^T d \geq 0$. D'altra parte $\bar{u}_p < 0$ e quindi $\hat{g}^T \bar{d} < 0$ se e solo se risulta $b_p^T \bar{d} > 0$. Quindi $\bar{d}$ è un vettore tale che

$$b_i^T \bar{d} \geq 0 \quad i = 1, \dots, p-1 \qquad b_p^T \bar{d} > 0,$$

ma allora per ipotesi deve essere $\hat{g}^T \bar{d} \geq 0$ che contraddice $\hat{g}^T \bar{d} < 0$. Quindi anche l'[Affermazione 2] è dimostrata. $\square$