Capitolo 8

Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker

8.1 Introduzione

In questo capitolo deriveremo le condizioni necessarie di Karush-Kuhn-Tucker (KKT) per problemi vincolati in cui S è descritto da vincoli di disuguaglianza e/o di uguaglianza lineari. Si tratta di formulare in modo alternativo le condizioni necessarie del paragrafo 6.12. A questo scopo utilizzeremo i *teoremi dell'alternativa* descritti nel Capitolo 7.

8.2 Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker

Consideriamo il problema di ottimizzazione su un poliedro e senza perdita di generalità ci riferiamo inizialmente ad un poliedro con soli vincoli di disuguaglianza. Il problema in considerazione è quindi:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & Ax \geq b \end{aligned} \qquad (P-POL)$$

Nel paragrafo 6.12 abbiamo derivato le condizioni necessarie di ottimo:

Se x^* è un punto di minimo locale allora *non esiste* una soluzione $d \in R^n$ al sistema di disequazioni lineare

$$\begin{aligned} & A_{I(x^*)} d \geq 0, \\ & \nabla f(x^*)^T d < 0. \end{aligned} \qquad (8.1)$$

dove $A_{I(x^*)}$ è la matrice $A_{I(x^*)} = (a_i^T)_{i \in I(x^*)}$ di dimensione $|I(x^*)| \times n$ e $I(x^*) = \{i : \ a_i^T x^* = b_i\}$.

Identificando il sistema (8.1) con il sistema (I) del Lemma di Farkas, e utilizzando il Lemma di Farkas, possiamo affermare quanto segue.

Non esiste una soluzione $d \in R^n$ al sistema di disequazioni lineare (8.1) se e solo se *esiste* una soluzione del sistema

$$
\begin{aligned}
& A^T_{I(x^*)} u = \nabla f(x^*), \\
& u \geq 0.
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

dove u è un vettore di dimensione $|I(x^*)|$.

Esempio 8.2.1 Consideriamo il sistema (6.28) ottenuto nell'esempio 6.14.2:

$$
\begin{aligned}
& 2d_1 - d_2 \geq 0 \\
& d_1 \geq 0 \\
& 20d_1 < 0
\end{aligned}
$$

A cui corrispondono

$$
A_{I(x^*)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^*) = (20,\ 0)^T.
$$

Il sistema (6.28) non ammette soluzione. Applicando il Lemma di Farkas deve esistere un vettore $u \in I\!R^2$ tale che $u \geq 0$ e

$$
\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Il sistema si scrive

$$
\begin{aligned}
& 2u_1 + u_2 = 20 \\
& -u_1 = 0 \\
& u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

che ammette la soluzione $u_1 = 0$, $u_2 = 20$. □

Utilizzando il Lemma di Farkas, possiamo stabilire le condizioni di ottimo per (P-POL), note come *condizioni di Karush-Kuhn-Tucker* (KKT), nella forma seguente.

Teorema 8.2.2 (Condizioni di Karush-Kuhn-Tucker per (P-POL)) *Sia x^* un punto di minimo locale del problema (P-POL). Allora esiste un vettore $\lambda^* \in R^m$ tale che risultino soddisfatte le condizioni seguenti:*

(i) $\nabla f(x^*) - A^T \lambda^* = 0$,

(ii) $\lambda^* \geq 0$,

(iii) $\lambda^*_i (b_i - a_i^T x^*) = 0$ *per* $i = 1, \ldots, m$.

(iv) $Ax^* \geq b$,

Dimostrazione. Sia x^* un punto di minimo locale; poiché x^* deve essere ammissibile vale banalmente la (iV). Inoltre non deve ammettere soluzione il sistema (8.1). Abbiamo già osservato che, identificando il sistema (8.1) con il sistema (I) del Lemma di Farkas, possiamo affermare che esiste una soluzione u del sistema (8.2).

Sia $u_i^* \geq 0$, $i \in I(x^*)$ una soluzione del sistema precedente e definiamo un vettore $\lambda^* \in R^m$ ponendo:

$$\lambda_i^* = \begin{cases} u_i^* & \text{per } i \in I(x^*) \\ 0 & \text{per } i \notin I(x^*). \end{cases} \tag{8.3}$$

Risulta ovviamente $\lambda^* \geq 0$ ed è soddisfatta la (ii). Inoltre, la (iii) è una conseguenza immediata della definizione (8.3) di λ^*. Abbiamo infatti che

$$\lambda_i^*(b_i - a_i^T x^*) = \begin{cases} u_i^*(b_i - a_i^T x^*) = 0 & \text{per } i \in I(x^*) \\ 0(b_i - a_i^T x^*) = 0 & \text{per } i \notin I(x^*). \end{cases}$$

Infine, ricordando che la (8.2) può essere scritta $\nabla f(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} u_i^* a_i$ possiamo scrivere

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} u_i^* a_i + \sum_{i \notin I(x^*)} 0 \cdot a_i = A^T \lambda^*.$$

È quindi soddisfatta la (i). □

Il vettore $\lambda \in I\!R^m$ si dice *moltiplicatore di Lagrange (generalizzato)* o *moltiplicatore di KKT* relativo ai vincoli $Ax \geq b$.

Osserviamo che la (ii) esprime il fatto che in un punto di minimo locale il gradiente della funzione è esprimibile come combinazione non negativa (conica) dei gradienti dei vincoli attivi in x^*:

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* a_i, \qquad \lambda_i^* \geq 0$$

La condizione (iii) è nota come *condizione di complementarità* ed esprime il fatto che in un punto di minimo locale deve essere nullo, per ciascun vincolo, il prodotto $\lambda_i^*(b_i - a_i^{*T} x^*)$, per cui, se il vincolo non è attivo, si deve annullare il corrispondente moltiplicatore.
Tenuto conto che $\lambda^* \geq 0$ e $Ax^* - b \geq 0$ la condizione (iii) si può scrivere equivalentemente come

$$\lambda^{*T}(b - Ax^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(b_i - a_i^T x^*) = 0.$$

Le condizioni enunciate si possono esprimere in una forma equivalente facendo riferimento alla *funzione Lagrangiana.*

La funzione Lagrangiana per il problema (P-POL) è definita come

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T(b - Ax)$$

Indicando con $\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f(x) - A^T \lambda$ il gradiente di L rispetto a x, la condizione (ii) esprime il fatto che nel punto (x^*, λ^*) deve annullarsi il gradiente della funzione Lagrangiana rispetto a x, per cui la coppia (x^*, λ^*) costituisce un *punto stazionario* della funzione Lagrangiana. Possiamo allora riscrivere le condizioni di KKT come segue

(Condizioni necessarie di Karush-Kuhn-Tucker)

Sia x^* un punto di minimo locale del problema (P-POL). Allora esiste un vettore $\lambda^* \in I\!R^m$ tale che risultino soddisfatte le condizioni seguenti:

(i) $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$ (stazionarietà),

(ii) $\lambda^* \geq 0$,

(iii) ${\lambda^*}^T(b - Ax^*) = 0$ (complementarità),

(iv) $Ax^* \geq b$, (ammissibilità).

Osserviamo che in un punto x^* che sodisfa le condizioni di KKT risulta

$$L(x^*, \lambda^*) = f(x^*).$$

I punti candidati ad essere minimo di un problema del tipo (P-POL) possono essere determinati risolvendo le condizioni di KKT. Introduciamo allora la seguente definizione.

Un punto $\bar{x}$ è detto *punto di KKT* o *punto stazionario* del problema (P-POL) se esiste $\bar{\lambda} \in I\!R^m$ tale che valgano le condizioni:

(i) $A\bar{x} \geq b$,

(ii) $\nabla L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$,

(iii) $\bar{\lambda} \geq 0$,

(iv) $\bar{\lambda}^T(b - A\bar{x}) = 0$.

I possibili candidati ad essere minimo locale sono quindi i punti di KKT

.

Esempio 8.2.3 Consideriamo il problema

$$\begin{array}{ll} \max & x_2^2 + \dfrac{1}{2}x_1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & \frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

Determiniamo tutti punti di KKT. Mettiamo innanzitutto il problema nella forma (P-POL).

$$\begin{array}{ll} \min & -x_2^2 - \dfrac{1}{2}x_1 \\ & -x_1 + x_2 \geq -1 \\ & -\frac{1}{2}x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

La funzione Lagrangiana per questo problema è:

$$L(x,\lambda) = -x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 + \lambda_1(-1 + x_1 - x_2) + \lambda_2(-1 + \frac{1}{2}x_1 + x_2) - \lambda_3 x_1$$

Le condizioni di KKT sono:

(i) (ammissibilità)

$$\begin{aligned} & -x_1 + x_2 \geq -1 \\ & -\frac{1}{2}x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

(ii) (stazionarietà)

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} + \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ & -2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

(iii) (non negatività)

$$\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3 \geq 0$$

(iv) (complementarità)

$$\begin{aligned} & \lambda_1(-1 + x_1 - x_2) = 0 \\ & \lambda_2(-1 + \frac{1}{2}x_1 + x_2) = 0 \\ & \lambda_3 x_1 = 0 \end{aligned}$$

Determiniamo i punti di KKT esaminando tutti i casi possibili. Dalla condizione $\lambda_3 x_1 = 0$ si ottiene che

$$0 = \lambda_3 x_1 = \begin{cases} x_1 = 0 \xmapsto{(i)} -1 \leq x_2 \leq 1 & \begin{cases} x_2 = -1 & \xmapsto{(\text{iv})_2} \lambda_2 = 0, \xmapsto{(\text{ii})_2} \lambda_1 = 2 \xmapsto{(\text{ii})_3} \lambda_3 = \frac{3}{2} \\ x_2 = 1 & \xmapsto{(\text{iv})_1} \lambda_1 = 0, \xmapsto{(\text{ii})_2} \lambda_2 = -2, \\ -1 < x_2 < 1 & \xmapsto{(\text{iv})} \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \xmapsto{(\text{ii})_2} x_2 = 0, \xmapsto{(\text{ii})_3} \lambda_3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \lambda_3 = 0 & \begin{cases} \lambda_2 = 0 \xmapsto{(\text{ii})_1} \lambda_1 = \frac{1}{2}, \xmapsto{(\text{ii})_2} x_2 = -\frac{1}{4}, \xmapsto{(\text{iv})_1} x_1 = \frac{3}{4} \\ \lambda_2 > 0 \begin{cases} \lambda_1 > 0 \xmapsto{(\text{iv})_{1,2} + (\text{i})} x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, \xmapsto{(\text{ii})_{1,2}} \lambda_2 = \frac{7}{9}\ \lambda_1 = \frac{1}{9} \\ \lambda_1 = 0 \xmapsto{(\text{ii})_1} \lambda_2 = 1, \xmapsto{(\text{ii})_2} x_2 = \frac{1}{2}, \xmapsto{(\text{iv})_2} x_1 = 1. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Quindi abbiamo trovato 4 punti di KKT

1. $(0,\ -1)^T$ con moltiplicatori $\lambda = (2\ , 0,\ 3/2)^T$ con valore della funz. obiettivo $f = -1$;
2. $(3/4,\ -1/4)^T$ con moltiplicatori $\lambda = (1/2\ , 0,\ 0)^T$ con valore della funz. obiettivo $f = -7/16$;

3. $(4/3,\ 1/3)^T$ con moltiplicatori $\lambda = (1/9\ ,7/9,\ 0)^T$ con valore della funz. obiettivo $f = -7/9$;
4. $(1,\ 1/2)^T$ con moltiplicatori $\lambda = (0\ ,1,\ 0)^T$ con valore della funz. obiettivo $f = -3/4$;

Poiché l'insieme ammissibile è compatto, esiste un punto di minimo globale e si trova tra i punti di KKT determinati so pra. Si tratta di scegliere quello con valore della funzione obiettivo minore: si tratta dei due punti $(0,\ 1)$ e $(0,\ -1)$.

$\square$

Ricordando che la condizione (8.1) diventa necessaria e sufficiente di ottimo globale nell'ipotesi che f sia convessa, otteniamo che anche le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti di ottimo globale nell'ipotesi che f sia convessa. Vale infatti il teorema seguente.

Teorema 8.2.4 (Condizioni necessarie e sufficienti di ottimo globale)

Sia f una funzione convessa con ∇f continuo in $I\!R^n$. Un punto x^* è minimo globale di (P-POL) se e solo se esiste $\lambda^* \in I\!R^m$ tale che valgano le condizioni:

(i) $Ax^* \geq b$,

(ii) $\nabla f(x^*) - A^T\lambda^* = 0$,

(iii) $\lambda^* \geq 0$,

(iv) ${\lambda^*}^T(b - Ax^*) = 0$.

Se inoltre f è strettamente convessa e valgono le condizioni precedenti, allora il punto x^* è l'unico punto di minimo globale di f su S.

Esempio 8.2.5 Consideriamo il problema dell'Esempio 6.14.2

$$\begin{array}{ll} \min & (x_1+10)^2 + (x_2-12)^2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \geq -30 \\ & 2x_1 - x_2 \geq -12 \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Si tratta di un problema convesso. La funzione Lagrangiana per questo problema è la funzione $L:\ I\!R^2 \times I\!R^4 \to I\!R$ definita come:

$$L(x,\lambda) = (x_1+10)^2 + (x_2-12)^2 + \lambda_1(-30 - 3x_1 + 2x_2) + \lambda_2(-12 - 2x_1 + x_2) - \lambda_3 x_1 - \lambda_4 x_2$$

Le condizioni di KKT in un punto x ammissibile richiedono che valga

$$\nabla_x L(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 2(x_1+10) - 3\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2(x_2-12) + 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

con

$$\begin{aligned} \lambda &\geq 0 \\ \lambda_1(-30 - 3x_1 + 2x_2) &= 0 \\ \lambda_2(-12 - 2x_1 + x_2) &= 0 \\ \lambda_3 x_1 &= 0 \\ \lambda_4 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Possiamo facilmente verificare che il punto ammissibile $x = (0,0)^T$ non soddisfa le condizioni di KKT. Infatti dalle condizioni di complementaritá si ottiene che $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$. Sostituendo in $\nabla_x L(x,\lambda) = 0$ si ha

$$\begin{aligned} 20 - \lambda_3 &= 0 \\ -24 - \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

da cui si ottiene il valore $\lambda_4 = -24 < 0$ che non è accettabile.

Consideriamo invece il punto $(0,12)^T$. In questo caso dalle condizioni di complementaritá si ottiene che $\lambda_4 = \lambda_1 = 0$. Sostituendo in $\nabla_x L(x,\lambda) = 0$ si ha

$$\begin{aligned} 20 - 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

da cui si ottiene $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 20 > 0$. Quindi il punto $(0,12)^T$ soddisfa le condizioni di KKT. $\square$

Possiamo inoltre enunciare anche le condizioni necessarie del secondo ordine

Teorema 8.2.6 (Condizioni necessarie del 2^o ordine di minimo locale sul poliedro) *Sia x^* un punto di minimo del Problema (P-POL). Allora esiste un vettore $\lambda^* \in R^m$ tale che risultino soddisfatte le condizioni di KKT ed inoltre risulta*

$$d^T \nabla_x^2 L(x^*,\lambda^*) d \geq 0 \qquad \textit{per ogni} \quad d \in I\!R^n : \; a_i^T d \geq 0, \quad i \in I(x^*) \quad e \quad \nabla f(x^*)^T d = 0.$$

La dimostrazione segue banalmente osservando che $\nabla_x^2 L(x^*,\lambda^*) = \nabla^2 f(x^*)$ e quindi si tratta di una semplice "riscrittura" del Teorema 6.14.5.

Dalle condizioni di KKT per problemi nella forma (P-POL) si possono anche derivare direttamente le condizioni di KKT per un problema con poliedro più generale. Analizziamo inizialmente il caso di poliedro descritto da soli vincoli di uguaglianza

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & Ax = b \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$. Il sistema di equazioni $Ax = b$ si può equivalentemente scrivere come $Ax \geq b$ e $-Ax \geq -b$, e dunque il problema si scrive:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & Ax \geq b \\ & -Ax \geq -b \end{aligned}$$

Associando ai vincoli i moltiplicatori $\mu_1, \mu_2 \in I\!R^m$, con $\mu_1, \mu_2 \geq 0$, la funzione Lagrangiana è :

$$L(x,\mu_1,\mu_2) = f(x) + \mu_1^T(b - Ax) + \mu_2^T(-b + Ax) = f(x) + (\mu_1 - \mu_2)^T(b - Ax).$$

Se si pone $\mu = \mu_1 - \mu_2$, si può scrivere

$$L(x,\mu) = f(x) + \mu^T(b - Ax)$$

dove $\mu \in R^m$ può assumere qualunque valore (positivo, negativo, nullo) in quanto differenza di due quantità non negative. Inoltre la condizione di complementarità è banalmente soddisfatta in ogni punto ammissibile. Dunque abbiamo ritrovato le condizioni di Lagrange della Proposizione 6.13.2.

Consideriamo ora un problema in in forma standard

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (P-ST)$$

e la funzione Lagrangiana per il problema (P-ST).

La funzione Lagrangiana per il problema (P-ST) è definita come

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \mu^T(Ax - b) - \lambda^T x$$

Si derivano facilmente le condizioni di ottimo.

Teorema 8.2.7 (Condizioni di Karush-Kuhn-Tucker per (P-ST)) *Sia x^* un punto di minimo locale del problema (P-ST). Allora esistono un vettore $\lambda^* \in I\!R^n$ e $\mu^* \in I\!R^m$ tale che risultino soddisfatte le condizioni seguenti:*

(i) $Ax^* = b$, $x^* \geq 0$ *(ammissibilità),*

(ii) $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + A^T\mu^* - \lambda^* = 0$ *(stazionarietà),*

(iii) $\lambda^* \geq 0$,

(iv) ${\lambda^*}^T x^* = 0$ *(complementarità).*

Naturalmente le condizioni di KKT possono essere scritte per un qualunque problema di minimizzazione su un poliedro[1]. Nel caso generale supponiamo di avere un problema definito da vincoli di uguaglianza e disuguaglianza del tipo.

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Dx = h \\ & Ax \geq b \end{array} \qquad (\mathrm{P-GEN})$$

in cui D è una matrice $p \times n$, A è una matrice $q \times n$, $h \in I\!R^p$, $b \in I\!R^q$. Allora

La funzione Lagrangiana per (P-GEN) è

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T(b - Ax) + \mu^T(Dx - h),$$

con $\lambda \in I\!R^q$, $\mu \in I\!R^p$.

[1]Nel caso in cui l'insieme ammissibile non sia un poliedro, è ancora possibile definire le condizioni necessarie di KKT purché i vincoli soddisfino opportune ipotesi dette *condizioni di qualificazione dei vincoli*. In questo corso non si trattano vincoli non lineari generici.

Inoltre

Le condizioni di KKT per il problema (P-GEN) sono soddisfatte in un punto $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$ se:

(i) $Ax^* \geq b$, $Dx^* = h$ (ammissibilità),

(ii) $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) - A^T\lambda^* + D^T\mu^* = 0$ (stazionarietà),

(iii) $\lambda^* \geq 0$,

(iv) ${\lambda^*}^T(b - Ax^*) = 0$ (complementarità).

Teorema 8.2.8 (Condizioni di Karush-Kuhn-Tucker per (P-GEN)) *Sia x^* un punto di minimo locale del problema (P-GEN). Allora esistono vettori $\lambda^* \in R^q$, $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tali che risultino soddisfatte le condizioni seguenti:*

(i) $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$,

(ii) $\lambda^* \geq 0$,

(iii) $\lambda_i^*(b_i - a_i^T x^*) = 0$ per $i = 1, \dots, q$.

Esempio 8.2.9 Consideriamo la seguente modifica del problema dell'Esempio 8.2.3.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 \\ & x_1 - x_2 = 1 \\ & \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Determiniamo tutti punti di KKT. Mettiamo innanzitutto il problema nella forma (P-GEN).

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 \\ & x_1 - x_2 = 1 \\ & -\tfrac{1}{2}x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

La funzione Lagrangiana per questo problema è:

$$L(x, \lambda) = -x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 + \mu(-1 + x_1 - x_2) + \lambda_1(-1 + \frac{1}{2}x_1 + x_2) - \lambda_2 x_1$$

Le condizioni di KKT sono:

(i) (ammissibilità)

$$x_1 - x_2 = 1$$

$$-\frac{1}{2}x_1 - x_2 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0$$

(ii) (stazionarietà)

$$-\frac{1}{2}+\mu+\frac{1}{2}\lambda_1-\lambda_2=0$$
$$-2x_2-\mu+\lambda_1=0$$

(iii) (non negatività)

$$\lambda_1,\lambda_2\geq 0$$

(iv) (complementarità)

$$\lambda_1(-1+\frac{1}{2}x_1+x_2)=0$$
$$\lambda_2x_1=0$$

Determiniamo i punti di KKT esaminando tutti i casi possibili. Dalla condizione $\lambda_2x_1=0$ si ottiene che

$$0=\lambda_2x_1=\begin{cases} x_1=0 \overset{(i)}{\longmapsto} & x_2=-1 \overset{(\mathrm{iv})_2}{\longmapsto} \lambda_1=0, \overset{(\mathrm{ii})_2}{\longmapsto} \mu=2 \overset{(\mathrm{ii})_3}{\longmapsto} \lambda_2=3/2 \\ \lambda_2=0 \text{ imponiamo} & \begin{cases} \lambda_1=0 \overset{(\mathrm{ii})_1}{\longmapsto} \mu=1/2, \overset{(ii)_2}{\longmapsto} x_2=-1/4, \overset{(\mathrm{i})_1}{\longmapsto} x_1=3/4 \\ \lambda_1>0 \overset{(\mathrm{iv})_2+(\mathrm{i})}{\longmapsto} x_1=4/3, x_2=1/3, \overset{(\mathrm{ii})_1+(\mathrm{ii})_2}{\longmapsto} \lambda_1=\frac{7}{9}\ \mu=\frac{1}{9}. \end{cases} \end{cases}$$

Quindi abbiamo trovato 3 punti di KKT

1. $x^1=(0,\ -1)^T$ con moltiplicatori $\mu=2$ e $\lambda=(0,\ 3/2)^T$ con valore della funz. obiettivo $f=-1$;
2. $x^2=(3/4,\ -1/4)^T$ con moltiplicatori $\mu=1/2$ e $\lambda=(0,\ 0)^T$ con valore della funz. obiettivo $f=-7/16$;
3. $x^3=(4/3,\ 1/3)^T$ con moltiplicatori $\mu=1/9$ e $\lambda=(7/9,\ 0)^T$ con valore della funz. obiettivo $f=-7/9$;

Poiché l'insieme ammissibile è compatto, esiste un punto di minimo globale e si trova tra i punti di KKT determinati sopra. Si tratta di scegliere quello con valore della funzione obiettivo minore: si tratta del punto $x^1=(0,\ -1)$.

□

Possiamo inoltre scrivere le condizioni necessarie del secondo ordine. In particolare si ha:

Teorema 8.2.10 (Condizioni necessarie del 2^o ordine) *Sia x^* un punto di minimo locale del problema (P-GEN). Allora esistono vettori $\lambda^*\in I\!R^p$ e $\mu^*\in I\!R^q$ tali che risultino soddisfatte le condizioni di KKT e inoltre risulta*

$$z^T\nabla^2_{xx}L(x^*,\lambda^*,\mu^*)z\geq 0 \quad \textit{per ogni } z:\ Dz=0,\ A_{I(x^*)}z\geq 0 \ \textit{ e } \ \nabla f(x^*)^Tz=0$$

Consideriamo nuovamente l'esempio 8.2.9.

Esempio 8.2.11 *Consideriamo i 3 punti di KKT precedentemente determinati e verifichiamo se soddisfano le condizioni necessarie del secondo ordine. La funzione Lagrangiana per questo problema è:*

$$L(x,\lambda) = -x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 + \mu(-1 + x_1 - x_2) + \lambda_1(-1 + \frac{1}{2}x_1 + x_2) - \lambda_2 x_1$$

il cui hessiano è

$$\nabla^2_{xx} L(x,\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \nabla^2 f(x).$$

Quindi per ogni $z = (z_1,\ z_2)^T$ *risulta* $z^T \nabla^2_{xx} L(x^*,\lambda^*,\mu^*) z = -2z_2^2$. *Inoltre* $\nabla f = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$.

Consideriamo il punto $x^1 = (0,\ -1)^T$. *Dobbiamo determinare i vettori* z *che definiscono le direzioni ammissibili. In* x^1 *è attivo il vincolo di disuguaglianza* $x_1 \geq 0$, *quindi le direzioni ammissibili sono i vettori* $z \in R^2$ *che risolvono il sistema*

$$\begin{aligned} &z_1 - z_2 = 0 \\ &z_1 \geq 0, \end{aligned}$$

ovvero tutti i vettori del tipo $z = (t,\ t)^T$ *con* $t \geq 0$. *Inoltre deve risultare*

$$\nabla f(x^1)^T z = (t,\ t)^T \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}t + 2t = 0,$$

da cui si ottiene $t = 0$ *e* $z = (0,\ 0)^T$. *La condizione necessaria del secondo ordine quindi è soddisfatta in quanto* $-2t^2 \equiv 0$.

Consideriamo il punto $x^2 = (3/4,\ -1/4)^T$. *In* x^2 *non è attivo nessun vincolo di disuguaglianza, quindi le direzioni ammissibili sono i vettori* $z \in R^2$ *che risolvono il sistema*

$$z_1 - z_2 = 0$$

ovvero tutti i vettori del tipo $z = (t,\ t)^T$. *Inoltre deve risultare*

$$\nabla f(x^2)^T z = (t,\ t)^T \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t = 0.$$

La condizione necessaria del secondo ordine quindi NON è soddisfatta in quanto $-2t^2 \geq 0$ *non è verificata qualunque sia* t. *Il punto* x^2 *non può essere un minimo locale.*

Consideriamo il punto $x^3 = (4/3,\ 1/3)^T$. *In* x^3 *è attivo il primo vincolo di disuguaglianza, quindi le direzioni ammissibili sono i vettori* $z \in R^2$ *che risolvono il sistema*

$$\begin{aligned} &z_1 - z_2 = 0 \\ &-\tfrac{1}{2}z_1 - z_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ovvero tutti i vettori del tipo $z = (t,\ t)^T$ *con* $t \leq 0$. *Inoltre deve risultare*

$$\nabla f(x^3)^T z = (t,\ t)^T \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}t - \frac{2}{3}t = 0,$$

che è verificata per $t = 0$. *Quindi l'unico vettore* $z = (0,\ 0)^T$ *e la condizione necessaria del secondo ordine quindi è soddisfatta in quanto* $-2t^2 \equiv 0$ *è verificata.* □

8.2.1 Programmazione quadratica

Una classe particolare di problemi di programmazione convessa con vincoli lineari è costituita dai problemi di **programmazione quadratica** in cui la funzione obiettivo è una funzione quadratica convessa, ossia dai problemi del tipo:

$$\begin{aligned} min \quad & \tfrac{1}{2}x^T Q x + c^T x, \quad \text{(PQ)} \\ & Ax \geq b \end{aligned}$$

dove Q è una matrice $n \times n$ semidefinita positiva. Le condizioni necessarie e sufficienti di ottimo si scrivono nella forma seguente.

Teorema 8.2.12 (Condizioni di ottimalità per la Programmazione Quadratica) *Sia Q una matrice simmetrica semidefinita positiva. Allora condizione necessaria e sufficiente perchè il punto x^* sia un punto di minimo globale del problema* (PQ) *è che esista $\lambda^* \in R^m$ tale che valgano le condizioni:*

(i) $Ax^* \geq b$,

(ii) $Qx^* + c - A^T\lambda^* = 0$,

(iii) $\lambda^* \geq 0$,

(iv) ${\lambda^*}^T(b - Ax^*) = 0$.

Se inoltre Q è definita positiva e valgono le condizioni precedenti, allora il punto x^* è l'unico punto di minimo globale del problema (PQ). □