Capitolo 9

Condizioni di ottimo per la Programmazione Lineare e teoria della dualità

In questo capitolo utilizzeremo le condizioni di KKT del capitolo 8 per derivare le condizioni necessarie e sufficienti di ottimo per la programmazione lineare.

9.1 Le condizioni di ottimalità per la PL

Nel caso in cui la funzione obiettivo sia lineare ovvero del tipo $f(x) = c^T x$, i problemi (P-POL), (P-ST), (P-GEN) analizzati nel paragrafo 6.14 sono problemi di Programmazione Lineare. Poiché si tratta di problemi convessi le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti.

Consideriamo inizialmente il problema di PL

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b \end{array} \tag{9.1}$$

La funzione Lagrangiana si scrive

$$L(x, \lambda) = c^T x + \lambda^T (b - Ax) = b^T \lambda + (c^T - \lambda^T A)x$$

e le condizioni di KKT sono le seguenti.

Teorema 9.1.1 (Condizioni di KKT per il problema (9.1)) *Un punto x^* è minimo globale del problema di Programmazione Lineare (9.1) se e solo se esiste $\lambda^* \in I\!R^m$ tale che valgano le condizioni:*

(i) $Ax^* \geq b$,

(ii) $c = A^T \lambda^*$,

(iii) $\lambda^* \geq 0$,

(iv) $\lambda^{*T}(b - Ax^*) = 0$.

Osserviamo che la (i) é una condizione nelle sole variabili x, le (ii) e (iii) sono condizioni nei soli moltiplicatori λ.

Possiamo fare qualche ulteriore considerazione. Le condizioni (ii) e (iii) esprimono il fatto che $\lambda^* \in I\!R^m$ deve essere ammissibile rispetto ai vincoli lineari

$$\begin{array}{l} A^T\lambda = c \\ \lambda \geq 0 \end{array} \qquad (9.2)$$

Il sistema (9.2) rappresenta un poliedro in forma standard nello spazio $I\!R^m$.

Consideriamo allora un $x \in I\!R^n$ soluzione ammissibile del problema (9.1), e un $\lambda \in I\!R^m$ appartenente al poliedro definito da (9.2), ovvero una coppia (x, λ) che soddisfa

$$Ax \geq b, \qquad \lambda \geq 0, \quad A^T\lambda = c. \qquad (9.3)$$

Osservando che

$$\lambda^T(b - Ax) = \sum_{i=1}^{m} \overset{\geq 0}{\lambda_i} \overset{\leq 0}{(b_i - a_i^T x)} \leq 0$$

possiamo facilmente scrivere

$$\begin{array}{rcl} 0 & \geq & \lambda^T(b - Ax) \\ & = & b^T\lambda - \lambda^T Ax \\ & \overset{(A^T\lambda=c)}{=} & b^T\lambda - c^T x. \end{array}$$

> Per ogni coppia (x, λ) che soddisfa $Ax \geq b,\ \lambda \geq 0,\ A^T\lambda = c$ risulta
>
> $$c^T x \geq b^T\lambda.$$

Si tratta di un risultato molto significativo, che riprenderemo più avanti. Notiamo che, in particolare, poiché il minimo globale x^* del problema (9.1) è ammissibile, otteniamo immediatamente che vale

$$c^T x^\star \geq b^T\lambda \qquad (9.4)$$

per ogni λ che soddisfa (9.2). Possiamo quindi affermare che una qualunque soluzione $\lambda \in I\!R^m$ che soddisfa (9.2) consente di determinare una limitazione inferiore al valore ottimo del problema (9.1).

Per migliorare la limitazione inferiore espressa dalle disuguaglianza (9.4), si può rendere quanto più possibile grande il termine di destra $b^T\lambda$ della disuguaglianza (9.4), cioè si può massimizzare la quantità $b^T\lambda$ al variare del vettore $\lambda \in \mathbb{R}^m$, tra tutti i vettori che soddisfano $A^T\lambda = c$, $\lambda \geq 0$. Più formalmente si può cercare la soluzione del problema

$$\begin{array}{ll} \max & b^T\lambda \\ & A^T\lambda = c \\ & \lambda \geq 0 \end{array} \qquad (9.5)$$

Si tratta di un problema di PL in forma standard (è sufficiente cambiare verso all'ottimizzazione da max a min). La coppia di problemi di Programmazione Lineare (9.1) e (9.5) viene detta *primale-duale*.

(Problema primale e duale)

Il problema

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b \end{array} \tag{9.6}$$

e il problema

$$\begin{array}{ll} \max & b^T \lambda \\ & A^T \lambda = c \\ & \lambda \geq 0 \end{array} \tag{9.7}$$

costituiscono una coppia *primale-duale* di Programmazione Lineare.

Vedremo nel seguito che, in maniera simmetrica, il problema (9.6) risulterà il problema duale del problema (9.7). La coppia primale (P) - duale (D) costituita dai problemi (9.6) e (9.7) è solo una possibile coppia primale-duale. La relazione tra i valori delle funzioni obiettivo del problema primale e duale in un qualunque punto ammissibile primale-duale che abbiamo ricavato in relazione alla coppia primale-duale (9.6) e (9.7) può essere generalizzato ad una qualunque coppia primale-duale (P)-(D) e costituisce un risultato noto come Teorema della dualità debole.

Teorema 9.1.2 (Teorema della Dualità debole) *Sia data una coppia primale (P) - duale (D) di problemi di programmazione lineare. Per ogni soluzione ammissibile $\bar{x}$ del problema di PL primale (P) ed ogni soluzione ammissibile $\bar{\lambda}$ del problema di PL duale (D) si ha*

$$b^T \bar{\lambda} \leq c^T \bar{x}$$

cioè il valore della funzione obiettivo duale in $\bar{\lambda}$ è minore o uguale del valore della fuzione obiettivo primale in $\bar{x}$.

Osserviamo ora che la condizione di complementarità (iv) del Teorema 9.1.1 può essere scritta in modo equivalente utilizzando la condizione (ii). In particolare possiamo scrivere (ricordando che $(A^T\lambda^*)^T = \lambda^{*T}A$)

$$0 \overset{\text{(iv)}}{=} \lambda^{*T}(b - Ax^*) = \lambda^{*T}b - \lambda^{*T}Ax^* \overset{\text{(ii)}}{=} \lambda^{*T}b - x^{*T}c.$$

Possiamo quindi scrivere le condizioni necessarie e sufficienti di KKT in una forma equivalente e più diffusamente utilizzata come condizioni di ottimo per la Programmazione Lineare.

(Condizioni necessarie e sufficienti di ottimo per (9.1))

Un punto x^* è minimo globale del problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \geq b \end{aligned} \tag{9.1}$$

se e solo se esiste $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tale che valgano le condizioni:

(i) $Ax^* \geq b$,

(ii) $c = A^T \lambda^*$,

(iii) $\lambda^* \geq 0$,

(iv) $b^T \lambda^* = c^T x^*$.

É possibile dimostrare che il valore de i moltiplicatori λ^* del teorema 9.1.1 sono la soluzione ottima del problema (9.5). In effetti le condizioni necessarie e sufficienti di minimo globale per (9.7) sono le stesse condizioni per il problema (9.6). Questa affermazione costituisce il teorema della Dualità forte per la PL.

Teorema 9.1.3 (Teorema della Dualità forte) *Il problema di PL (9.6) ammette soluzione ottima $x^* \in \mathbb{R}^n$ se e solo se il problema duale (9.7) ammette soluzione ottima $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ e risulta*

$$c^T x^\star = b^T \lambda^\star.$$

Dimostrazione. La dimostrazione consiste nel far vedere che le condizioni di ottimo del problema primale coincidono con le condizioni di ottimo per il problema duale. Per quanto riguarda il problema primale (9.6) abbiamo già dimostrato che le condizioni di ottimo richiedono che esista un moltiplicatore $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tale che

(i) $Ax^* \geq b$,

(ii) $c = A^T \lambda^*$,

(iii) $\lambda^* \geq 0$,

(iv) $b^T \lambda^* = c^T x^*$.

Dimostriamo ora che queste condizioni sono effettivamente anche condizioni necessarie e sufficienti di ottimo per il problema duale (9.5). Si utilizza il teorema 8.2.7. Osserviamo che il problema duale (9.5) è in forma di massimizzazione e che è definito nello spazio $\mathbb{R}^m$. Associamo agli n vincoli di uguaglianza $A^T \lambda = c$ i moltiplicatori $z \in \mathbb{R}^n$ e ai vincoli $\lambda \geq 0$ i moltiplicatori $v \in \mathbb{R}^m$. La funzione Lagrangiana è dunque

$$L(\lambda, z, v) = -b^T \lambda + z^T (A^T \lambda - c) - v^T \lambda.$$

Per il teorema 8.2.7 λ^* è minimo globale del problema (9.5) se e solo se esistono dei vettori $z^* \in \mathbb{R}^n$ e $v^* \in \mathbb{R}^m$ tali che

(a) $A^T \lambda^* = c$, $\lambda^* \geq 0$,

(b) $-b + Az^* - v^* = 0,$

(c) $v^* \geq 0,$

(d) ${v^*}^T \lambda^* = 0.$

La condizione (a) fornisce immediatamente le (i) e (ii).
Dalla condizione (b) si può ricavare v^* e si ottiene

$$-b + Az^* = v^*.$$

Imponendo la (c) $v^* \geq 0$ si ottiene

$$-b + Az^* \geq 0$$

Sostituendo in (d) si ha poi

$$0 = {v^*}^T \lambda^* = (-b + Az^*)^T \lambda^* = -b^T \lambda^* + {z^*}^T A^T \lambda^* = -b^T \lambda^* + {z^*}^T c$$

Identificando $z^* = x^*$ si hanno dunque anche la (iii) e (iv). Possiamo quindi concludere che le condizioni necessarie e sufficienti di ottimo per i problemi di Programmazione Lineare (9.6) e (9.7) sono le stesse e richiedono l'ammissibilità primale e duale e l'uguaglianza dei valori delle funzioni obiettivo.

□

È evidente la forte relazione che esiste tra i due problemi di Programmazione Lineare (9.6) e (9.7) e dunque le *condizioni di ottimalità* sono spesso riportate in riferimento alla coppia primale–duale (9.1) e (PL-ST).

Condizioni di Ottimalità
Siano dati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$. Allora $\bar{x}$ e $\bar{\lambda}$ sono soluzioni ottime rispettivamente per la coppia

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \max & b^T \lambda \\ & A^T \lambda = c \\ & \lambda \geq 0 \end{array}$$

se e solo se valgono le seguenti condizioni

(i) $A\bar{x} \geq b$, (ammissibilità primale)

(ii) $A^T \bar{\lambda} = c, \quad \bar{\lambda} \geq 0$ (ammissibilità duale);

(iii) $c^T \bar{x} = b^T \bar{\lambda}$ (coincidenza dei valori delle funzioni obiettivo).

Osserviamo che è possibile costruire il problema duale di un problema di un qualunque programmazione lineare a partire dalle condizioni di KKT. In particolare un'altra coppia di problemi primale - duale è quella in cui le variabili primali sono non negative

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

In questo caso, gli $m+n$ vincoli del problema si possono scrivere come

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

e possiamo associare le variabili duali λ ai primi m e le variabili s agli ultimi n ottenendo il problema duale

$$\begin{array}{ll} \max & b^T\lambda \\ & A^T\lambda + s = c \\ & \lambda \geq 0, \quad s \geq 0 \end{array}$$

Eliminando le variabili $s = c - A^T\lambda$ dal problema precedente si ottiene la coppia primale - duale nelle sole variabili x, λ

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T\lambda \\ & A^T\lambda \leq c \\ & \lambda \geq 0 \end{array}$$

In generale, la costruzione del problema duale a partire da un qualsiasi problema di Programmazione Lineare può essere effettuata seguendo semplici regole schematiche. Tali regole sono riportate nel prossimo paragrafo.

Il teorema della *dualità debole* e il teorema della *dualità forte* valgono pe una qualunque coppia primale-duale (P)-(D) e costituiscono i risultati fondamentali della teoria della dualità.

Teorema 9.1.4 (Teorema della Dualità Forte) *Sia data una coppia primale (P) - duale (D) di problemi di programmazione lineare. Il problema primale (P) ammette una soluzione ottima $x^\star$ se e solo se il problema duale (D) ammette una soluzione ottima $\lambda^\star$. Inoltre i valori delle funzioni obiettivo dei due problemi all'ottimo sono uguali cioè risulta*

$$c^T x^\star = b^T\lambda^\star.$$

Osserviamo che il teorema della dualità forte è equivalente alle condizioni di ottimo di KKT per la coppia primale - duale

(Condizioni necessarie e sufficienti di ottimo)

Un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ è minimo globale del problema di Programmazione Lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

se e solo se esiste $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ soluzione ottima del problema

$$\begin{array}{ll} \max & b^T \lambda \\ & A^T \lambda \leq c \\ & \lambda \geq 0 \end{array}$$

e dunque tali valgano le condizioni:

(i) $Ax^* \geq b$, $x^* \geq 0$ (ammissibilità primale)

(ii) $A^T \lambda^* \leq c$, $\lambda^* \geq 0$, (ammissibilità duale)

(iii) ${\lambda^*}^T (b - Ax^*) = 0$ (complementarità primale)

(iv) ${x^*}^T (A^T \lambda^* - c) = 0$ (complementarità duale)

Ricordando inoltre che x^* è un minimo del problema (PL), e quindi risulta $c^T x^* \leq c^T x$ per ogni x tale che $Ax \geq b$, possiamo affermare:

(Limitazione superiore ed inferiore per il valore ottimo del problema (PL))

Sia x^* un minimo globale del problema di Programmazione Lineare (PL). Per ogni $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ che soddisfa $Ax \geq b,\ \lambda \geq 0,\ A^T \lambda = c$, risulta

$$b^T \tilde{\lambda} \leq c^T x^* \leq c^T \tilde{x}.$$

Analogamente per il problema in forma standard possiamo dare una limitazione inferiore e superiore al valore ottimo $b^T \lambda^*$. Infatti, presa una qualunque coppia (x, λ) che soddisfa (9.3), si può scrivere

$$\begin{array}{rcl} b^T \lambda & \stackrel{(A^T\lambda = c)}{=} & b^T \lambda + x^T (c - A^T \lambda) \\ & = & c^T x + \lambda^T (b - Ax) \\ & \stackrel{(\lambda \geq 0,\ b \leq Ax)}{\leq} & c^T x. \end{array}$$

Possiamo allora affermare:

(Limitazione superiore ed inferiore per il valore ottimo del problema (PL-ST))

Sia λ^* un minimo globale del problema di Programmazione Lineare (PL-ST). Per ogni $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ che soddisfano (9.3), si ha

$$b^T \tilde{\lambda} \leq b^T \lambda^* \leq c^T \tilde{x}.$$

Dal teorema 9.1.2 si ottiene il seguente corollario.

Corollario 9.1.5 *Se $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile del problema primale (P) e $\bar{\lambda}$ una soluzione ammissibile del problema duale (D) tali che*

$$c^T \bar{x} = b^T \bar{\lambda} \tag{9.8}$$

allora $\bar{x}$ e $\bar{\lambda}$ sono soluzioni ottime rispettivamente per il problema primale (P) e per il problema duale (D).

Utilizzando il teorema della dualità debole possiamo anche derivare delle condizioni di illimitatezza di un problema di PL. Vale in particolare questo risultato.

Teorema 9.1.6 (Condizione di illimitatezza del primale) *Se il problema primale (P) è illimitato (inferiormente) allora il problema duale (D) è inammissibile. Viceversa se il problema duale (D) è illimitato (superiormente) allora il problema primale (P) è inammissibile.*

Dim.: Supponiamo che (P) sia illimitato e che, per assurdo, il problema duale (D) sia ammissibile, cioè che esista una soluzione ammissibile $\bar{\lambda}$ del problema duale (D). Allora, per il Teorema 9.1.2 (Teorema della Dualità debole), risulta $c^T x \geq b^T \bar{\lambda}$ per ogni soluzione ammissibile x del problema primale (P). Ma questo contraddice l'ipotesi che (P) sia illimitato inferiormente. Analogamente si pu procedere con il viceversa. □

Il Teorema Fondamentale della PL (cfr. Teorema 10.2.2) afferma che per un problema di PL possiamo verificarsi solo tre possibili casi:

(i) il problema ammette soluzione ottima,

(ii) il problema è illimitato

(iii) il problema è inammissibile.

Sulla base dei risultati fino ad ora esaminati si evince che data un coppia primale–duale di problemi di Programmazione Lineare possono verificarsi solo le possibilità riportate schematicamente nella tabella che segue.

		DUALE		
		OTTIMO FINITO	ILLIMITATO SUPERIOR.	INAMMISSIBILE
PRIMALE	OTTIMO FINITO	SI	NO	NO
	ILLIMITATO INFERIOR.	NO	NO	SI
	INAMMISSIBILE	NO	SI	SI

9.2 Costruzione del duale di un problema di PL

La coppia di problemi primale-duale definita nel paragrafo precedente è solo una delle possibile coppie primali-duali di problemi di Programmazione Lineare. Dato un qualunqur problema di PL, utilizzando le condizioni di ottimalità è possibile costruire il problema duale corrispondente. È però possibile definire delle regole di "costruzione automatica" che consente di scrivere il problema duale in forma rapida utilizzando alcuni accorgimenti.

Si consideri un problema Programmazione Lineare scritto nella forma più generale cioè

$$\begin{array}{ll} \min & c_1^T y + c_2^T z \\ & Cy + Dz = h \\ & Ey + Fz \geq g \\ & y \geq 0 \end{array} \tag{9.9}$$

in cui le variabili sono $(y,\ z)^T \in I\!R^n$ suddivise in $y \in \mathbb{R}^{n_1}$ e $z \in \mathbb{R}^{n_2}$ con $n = n_1 + n_2$. Corrispondentemente abbiamo $c_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $c_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$. Le variabili $y \geq 0$ mentre le variabili z non sono vincolate in segno.

Le matrici C, D, E, F sono rispettivamente di dimensione: C matrice $p \times n_1$, D matrice $p \times n_2$, E matrice $q \times n_1$, F matrice $q \times n_2$. Dunque il problema ha p vincoli di uguaglianza espressi da $Cy + Dz = h$ con $h \in \mathbb{R}^p$ e q vincoli di disuguaglianza $Ey + Fz \geq g$ con $g \in \mathbb{R}^q$.

La notazione in cui è scritto questo generico problema di Programmazione Lineare (9.9) è tale da evidenziare separatamente gli elementi che intervengono nella formulazione: le variabili sono partizionate nella variabili y vincolate in segno e z non vincolate in segno e corrispondentemente anche i coefficienti di costo della funzione obiettivo sono partizionati in c_1 e c_2; i vincoli sono scritti suddividendo quelli di uguaglianza ($=$) e quelli di disuguaglianza (≥ 0).

Osservazione importante

Nella definzione di regole per la costruzione del problema duale di un generico problema di PL è essenziale mettere il problema nella forma indicata, con particolare attenzione al "verso" dell'ottimizzazione, cioè min o max, e al "verso" dei vincoli di disuguaglianza che corripondentemente devono essere nella forma $\geq$ o $\leq$.

Per costruire il problema duale del problema (9.9) è sufficiente riportarsi alla forma del problema (PL) con soli vincoli di disuguaglianza . A tale scopo riscriviamo il problema (9.9) nella forma equivalente

$$\begin{array}{ll} \min & c_1^T y + c_2^T z \\ & Cy + Dz \geq h \\ & -Cy - Dz \geq -h \\ & Ey + Fz \geq g \\ & y \geq 0 \end{array}$$

ovvero in forma matriciale

$$\begin{array}{ll} \min & \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} C & D \\ -C & -D \\ E & F \\ I_{n_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} h \\ -h \\ g \\ 0 \end{pmatrix}, \end{array}$$

dove I_{n_1} è la matrice identità di ordine n_1. Quindi il problema (9.9) è stato ricondotto nella forma (PL) in cui

$$A = \begin{pmatrix} C & D \\ -C & -D \\ E & F \\ I_{n_1} & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} h \\ -h \\ g \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Siamo quindi in grado di scrivere il duale di questo problema nella forma (PL-ST)

$$\begin{array}{ll} \max & b^T \lambda \\ & A^T \lambda = c \\ & \lambda \geq 0 \end{array}$$

in cui

$$A^T = \begin{pmatrix} C & -C & E & I_{n_1} \\ D & -D & F & 0 \end{pmatrix}$$

e il vettore delle variabili duali si può decomporre in $\lambda = (u,\ v,\ w,\ t)^T \in I\!R^m = I\!R^{2p+q+n_1}$. Il problema duale si scrive in forma matriciale

$$\begin{array}{ll} \max & \begin{pmatrix} h \\ -h \\ g \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ t \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} C & -C & E & I_{n_1} \\ D & -D & F & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ & u,\ v,\ w,\ t \geq 0. \end{array}$$

Sviluppando si ottiene

$$\begin{array}{ll} \max & h^T u - h^T v + g^T w \\ & C^T u - C^T v + E^T w + I_{n_1} t = c_1 \\ & D^T u - D^T v + F^T w = c_2 \\ & u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, t \geq 0 \end{array} \quad \text{che è equivalente a} \quad \begin{array}{ll} \max & h^T (u - v) + g^T w \\ & C^T (u - v) + E^T w + t = c_1 \\ & D^T (u - v) + F^T w = c_2 \\ & u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, t \geq 0. \end{array}$$

Effettuando il cambio di variabili $u - v = \mu$ si ottiene il seguente problema

$$\begin{array}{ll} \max & h^T \mu + g^T w \\ & C^T \mu + E^T w + t = c_1 \\ & D^T \mu + F^T w = c_2 \\ & w \geq 0, z \geq 0. \end{array}$$

Eliminando la variabile t utilizzando il primo vincolo $t = d - C^T \mu - E^T w$ possiamo ancora scrivere

$$\begin{array}{ll} \max & h^T \mu + g^T w \\ & C^T \mu + E^T w \leq c_1 \\ & D^T \mu + F^T w = c_2 \\ & w \geq 0 \end{array} \tag{9.10}$$

nelle variabili $(\mu, w) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$, con μ non vincolata in segno e $w \geq 0$.
Il problema (9.10) è il *problema duale* del problema (9.9) che viene detto *problema primale*.

Osservazione importante

Le variabili (x, y) sono dette *variabili primali* e corrispondono ai moltiplicatori dei vincoli lineari di tipo generale del problema duale. Le variabili (μ, w) sono dette *variabili duali* e corrispondono ai moltiplicatori dei vincoli lineari di tipo generale del problema primale.

I due problemi costituiscono la generica coppia *coppia primale–duale*.

$$
(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & c_1^T y + c_2^T z \\ & Cz + Dy = h \\ & Ez + Fy \geq g \\ & y \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \max & h^T \mu + g^T\ w \\ & C^T \mu + E^T w \leq c_1 \\ & D^T \mu + F^T w = c_2 \\ & w \geq 0. \end{array} \qquad (D)
$$

Dall'osservazione dei due problemi si deducono facilmente le proprietà fondamentali di una coppia primale–duale; innanzitutto un problema è di minimizzazione mentre l'altro è di massimizzazione. Inoltre poiché la matrice dei coefficienti dei vincoli di un problema si ottiene trasponendo quella dell'altro, si ha che ad ogni variabile di un problema corrisponde un vincolo nell'altro. Si osserva inoltre uno scambio tra i termini noti di un problema e i coefficienti della funzione obiettivo dell'altro.

Queste proprietà possono essere così schematicamente riassunte:

- il problema duale di un problema di minimizzazione è un problema di massimizzazione e simmetricamente, il problema duale di un problema di massimizzazione è un problema di minimizzazione;
- ad ogni vincolo di uguaglianza del problema primale è associata una variabile nel problema duale non vincolata in segno;
- ad ogni vincolo di disuguaglianza (di maggiore o uguale) del problema primale è associata una variabile nel problema duale vincolata in segno;
- ad ogni variabile vincolata in segno del problema primale è associato un vincolo di disuguaglianza ($\leq$ se il problema è di massimizzazione, $\geq$ se il problema è di minimizzazione) del problema duale;
- ad ogni variabile non vincolata in segno del problema primale è associato un vincolo di uguaglianza del problema duale.

Queste corrispondenze possono essere riassunte nella tabella che segue dove gli insieme I, J, M e N sono insiemi di indici:

	PRIMALE	DUALE	
	min $c^T x$	max $b^T u$	
VINCOLI	$= b_i, \quad i \in I$ $\geq b_i, \quad i \in J$	$u_i, \quad i \in I$, libere $u_i, \quad i \in J,\ u_i \geq 0$	VARIABILI
VARIABILI	$x_j \geq 0, \quad j \in M$ $x_j, \quad j \in N$ libere	$\leq c_j, \quad j \in M$ $= c_j, \quad j \in N$	VINCOLI

Esempio 9.2.1 *Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$
\begin{array}{ll}
\max & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\
 & 2x_1 - x_3 \leq 7 \\
 & 3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 5 \\
 & x_2 + x_3 \leq 6 \\
 & x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Il problema duale è il seguente problema di minimizzazione

$$
\begin{array}{ll}
\min & 8u_1 + 7u_2 + 5u_3 + 6u_4 \\
 & u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 4 \\
 & 2u_1 + 4u_3 + u_4 \geq 3 \\
 & 3u_1 - u_2 - u_3 + u_4 = 2 \\
 & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0.
\end{array}
$$

□

Esempio 9.2.2 *Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\
 & 3x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 7 \\
 & x_1 + x_2 - 6x_3 \leq 9 \\
 & 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Dopo aver riscritto il secondo vincolo come $-x_1 - x_2 + 6x_3 \geq -9$ si può formulare facilmente il problema duale associato

$$
\begin{array}{ll}
\max & 7u_1 - 9u_2 + 8u_3 \\
 & 3u_1 - u_2 + 4u_3 \leq 2 \\
 & u_1 - u_2 - u_3 \leq -3 \\
 & 5u_1 + 6u_2 - 2u_3 = 1 \\
 & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0.
\end{array}
$$

□

Esempio 9.2.3 *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 4x_2 \geq 24 \\ & 5x_1 + x_2 \geq 25 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Geometricamente si ricava facilmente che questo problema ammette soluzione ottima nel punto $(x_1, x_2) = (4, 5)$ *e il valore ottimo della funzione obiettivo è pari a* 19. *Se si considera il problema duale*

$$\begin{array}{ll} \max & 24u_1 + 25u_2 \\ & u_1 + 5u_2 \leq 1 \\ & 4u_1 + u_2 \leq 3 \\ & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0; \end{array}$$

si ricava facilmente (geometricamente) che, in accordo con quanto previsto dal Teorema della Dualità Forte, anche questo problema ammette soluzione ottima nel punto $(u_1, u_2) = \left(\frac{14}{19}, \frac{1}{19}\right)$ *e il valore ottimo della funzione obiettivo vale* 19.

Esempio 9.2.4 *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Geometricamente si ricava che il problema è illimitato superiormente. Quindi, per l'analisi teorica vista deve risultare che il suo duale è inammissibile. E infatti se si considera il problema duale associato

$$\begin{array}{ll} \min & 3u_1 + 6u_2 \\ & -2u_1 - \frac{1}{2}u_2 \geq 2 \\ & u_1 + u_2 \geq 3 \\ & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{array}$$

si vede facilmente che questo problema non ammette soluzioni ammissibili.

9.3 Il problema di Knapsack continuo

Utilizzando la teoria della dualità, determiniamo la soluzione ottima e il valore ottimo della funzione obiettivo del seguente problema di Knapsack continuo (non limitato).

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & a^T x \leq b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

in cui x, a, c sono vettori di $\mathbb{R}^n$, $c_i > 0$ e $0 < a_i < b$ per $i = 1, \dots, n$ e b è uno scalare positivo.

Il problema duale ha una sola variabile $y \in \mathbb{R}$ ed è

$$\begin{array}{lll} \min & by & \\ & a_i y \geq c_i, & i = 1, \dots, n \\ & y \geq 0 & \end{array}$$

La soluzione di questo problema è banale. Indichiamo con

$$\frac{c_k}{a_k} = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{c_i}{a_i} \right\}$$

e sia $I_k = \left\{ i : \ \frac{c_i}{a_i} = \frac{c_k}{a_k} \right\}$ l'insieme degli indici per cui si raggiunge il massimo. Un vettore y è ammissibile duale se e solo se soddisfa $y \ge \frac{c_k}{a_k}$. Poiché si tratta di un problema di minimizzazione e $b > 0$, la soluzione ottima duale è $y^* = \frac{c_k}{a_k} > 0$.
La soluzione ottima x^* deve soddisfare le condizioni di complementarità:

$$\begin{array}{ll} x_i^*(a_i y^* - c_i) = 0 & \quad i = 1, \dots, n \\ y^*(b - a^T x^*) = 0 & \end{array}$$

Per ogni $i \notin I_k$, si ha, dalla prima delle equazioni precedenti, $x_i^* = 0$. Inoltre, dalla seconda, si ha $a^T x^* = b$. Evidenziando le variabili in I_k si ottiene

$$\sum_{i \in I_k} a_i x_i^* = b.$$

Se $I_k = \{k\}$, allora la soluzione ottima è unica e vale

$$\begin{array}{l} x_k^* = \dfrac{b}{a_k}, \\ x_i^* = 0, \quad \text{per ogni} \quad i \neq k. \end{array}$$

Altrimenti (se $|I_k| \ge 2$) la soluzione del problema di knapsack non è unica; ogni soluzione che soddisfa il vincolo $\sum_{i \in I_k} a_i x_i^* = b$ è ottima. Ad esempio, ogni soluzione del tipo

$$\begin{array}{l} x_j^* = \dfrac{b}{a_j}, \quad \text{per un } j \in I_k \\ x_i^* = 0, \quad \text{per ogni} \quad i \neq j \end{array}$$

è ottima. □

Sia dato il seguente problema di Knapsack continuo (limitato).

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & a^T x \le b, \\ & 0 \le x \le 1 \end{array}$$

in cui x, a, c sono vettori di $\mathbb{R}^n$, $c_i > 0$ e $0 < a_i < b$ per $i = 1, \dots, n$ e si assuma che

$$\frac{c_1}{a_1} > \frac{c_2}{a_2} > \dots > \frac{c_n}{a_n}.$$

Utilizzando la teoria della dualità, determinare la soluzione ottima e il valore ottimo della funzione obiettivo.

Soluzione. Analogamente all'esercizio precedente scriviamo il problema duale di

$$\begin{array}{lll} & \max & c^T x \\ (\lambda) & & a^T x \leq b, \\ (z_i) & & x \leq 1 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

che ha $n+1$ variabili, $y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{lll} \min & by + e^T z & \\ & a_i y + z_i \geq c_i, & i = 1, \ldots, n \\ & y \geq 0, \quad z_i \geq 0 & i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Nelle ipotesi poste il problema primale è non vuoto e limitato. Esiste quindi una soluzione ottima primale x^* e una soluzione ottima duale y^*, z^* che soddisfano le condizioni di complementarità:

$$\begin{array}{ll} x_i^*(a_i y^* + z_i^* - c_i) = 0 & i = 1, \ldots, n \\ y^*(b - a^T x^*) = 0 & \\ z_i^*(1 - x_i^*) = 0 & \end{array}$$

Mostriamo innnanzitutto che, nelle ipotesi poste, esiste un solo $k \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $x_k^* \in (0,1)$ (per cui cioè x_k^* è frazionaria).
Infatti sia $x_k^* \in (0,1)$, per le condizioni di complementarità risulta $z_k^* = 0$ e $a_k y^* - c_k = 0$, cioè $y^* = \dfrac{c_k}{a_k}$. Se esistesse un altro indice $h \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $x_h^* \in (0,1)$, questo implicherebbe $\dfrac{c_k}{a_k} = \dfrac{c_h}{a_h}$, che è assurdo perchè abbiamo supposto che i rapporti peso-ingombro fossero ordinati in modo strettamente decrescente.[1] Sia quindi $x_k^* \in (0,1)$. Allora $y^* = \dfrac{c_k}{a_k} \neq 0$ e quindi dalle condizioni di complementarità deve risultare $a^T x^* = b$.
Partizioniamo gli indici $\{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ in due insiemi $I_1 = \{i : \ x_i^* = 1\}$ e $I_0 = \{i : \ x_i^* = 0\}$. Allora possiamo scrivere $\sum_{i \in I_1} a_i x_i^* + \sum_{i \in I_0} a_i x_i^* + a_k x_k^* = b$, da cui si ottiene

$$x_k^* = \frac{b - \sum_{i \in I_1} a_i}{a_k}.$$

Possiamo ora dimostrare che risulta $x_i^* = 1$ per $i < k$ e $x_i^* = 0$ per $i > k$. L'indice k viene chiamato *indice critico* proprio perchè rappresenta l' "oggetto" (attività, progetto o simili) il cui inserimento determina la violazione della capacità b.
Dimostriamo quindi che

$$I_1 = \{1, \ldots, k-1\} \qquad I_0 = \{k+1, \ldots, n\}.$$

Sia $x_i^* = 1$, allora per le condizioni di complementarità risulta $z_i^* = c_i - a_i y^*$, ma $z_i^* \geq 0$ per l'ammissibilità duale e quindi otteniamo $y^* = \dfrac{c_k}{a_k} \leq \dfrac{c_i}{a_i}$ che, nelle ipotesi di ordinamento dei coefficienti, vale solo se $i < k$. D'altra parte, se $x_i^* = 0$ risulta $z_i^* = 0$ e per l'ammissibilità duale $a_i y^* - c_i \geq 0$, cioè $y^* = \dfrac{c_k}{a_k} \geq \dfrac{c_i}{a_i}$ che vale solo se $i > k$. □

[1] Questa ipotesi serve solo per semplificare la trattazione del problema. Nel caso di ordinamento non crescente $\dfrac{c_1}{a_1} > \dfrac{c_2}{a_2} > \ldots > \dfrac{c_n}{a_n}$ si può procedere come nell'esercizio precedente (vedi anche §11.6).

9.3.1 Analisi di sensitività alla variazione dei dati

Nei modelli reali le variabili (primali) possono rappresentare, ad esempio, livelli di produzione e i coefficienti di costo possono essere associati ai profitti ricavati dalla vendita dei prodotti. Quindi la funzione obiettivo di un problema primale indica direttamente come un aumento della produzione può influenzare il profitto. Sempre in relazione, ad esempio, ad un modello per la pianificazione della produzione, i vincoli di un problema (primale) possono rappresentare una limitazione dovuta alla limitata disponibilità delle risorse; ora, un aumento della disponibilità delle risorse può consentire un aumento della produzione e quindi anche del profitto, ma questa relazione tra aumento della disponibilità delle risorse e aumento del profitto non si deduce facilmente dal problema formulato (il problema primale). Uno dei possibili usi della dualità è quello di rendere esplicito l'effetto dei cambiamenti nei vincoli (ad esempio in quelli di disponibilità di risorse) sul valore della funzione obiettivo.

L'analisi della sensitività si occupa proprio di stabilire come si modifica la soluzione ottima di un modello lineare in conseguenza di variazioni dei dati. Un ruolo fondamentale in questa analisi è giocato dai cosidetti *prezzi ombra*, che, misurano i "costi" impliciti associati ai vincoli. Come vedremo, i prezzi ombra sono nient'altro che le variabili duali.

9.3.2 Interpretazione geometrica della variazione dei dati sui problemi primale duale

Consideriamo la seguente coppia di problemi primale-duale di programmazione lineare:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 6x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \min & 5u_1 + 4u_2 \\ & u_1 + u_2 \ge 2 \\ & 2u_1 + u_2 \ge 6 \\ & u_1, u_2 \ge 0 \end{array} \quad (D)$$

Supponiamo che il problema primale rappresenti un semplice problema di produzione in cui x_1, x_2 rappresentano livelli di attività produttiva e in vincoli corrispondano a due risorse limitate.
La soluzione grafica dei problemi (P) e (D) è riportata in Figura 9.1.

Il problema primale ha unica soluzione $x^* = (0,\ 5/2)^T$, il duale ammette l'unica soluzione ottima $u^* = (3,\ 0)^T$.
Si osserva geometricamente (ed è ovvio anche dal valore delle variabili duali u^*) che in x^* è attivo un solo vincolo del problema primale, il primo. Questo significa che il livello di produzione ottima corrisponde ad utilizzare completamente la prima risorsa ($x_1^* + 2x_2^* = 5$), mentre la seconda risorsa è in eccesso ($x_1^* + x_2^* = 2,5 < 4$). Inoltre il livello di produzione ottima pone $x_1^* = 0$ che significa che il prodotto rappresentato da x_1 non è prodotto.
Ci si possono porre allora due diverse domande

1. conviene acquisire una quantità maggiore di risorsa relativa al primo vincolo ? Quanta e a quale prezzo ?
2. quando puó diventare conveniente produrre anche il prodotto x_1 ?

Possiamo rispondere a queste domande facendo delle analisi di tipo geometrico sul problema primale e duale.

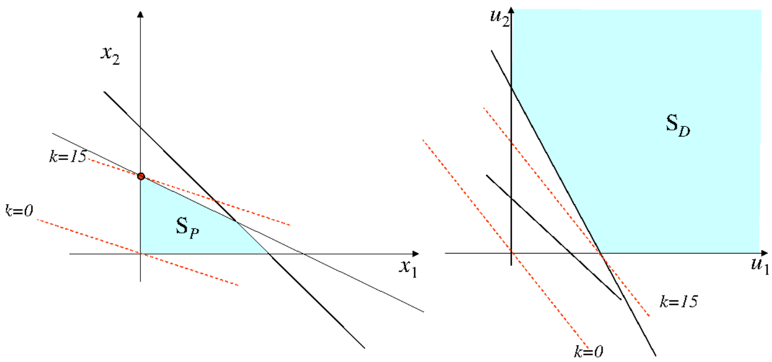

Figura 9.1: Soluzione grafica della coppia primale duale.

Cambiamenti nei termini noti dei vincoli. Acquisire una quantità maggiore di risorsa relativa al primo vincolo significa incrementare il r.h.s del vincolo da 5 a $5+\delta$ con $\delta \geq 0$. Da un punto di vista analitico i due problemi (P) e (D) diventano

$$
(P)_\delta \quad
\begin{array}{ll}
\max & 2x_1 + 6x_2 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 5 + \delta \\
 & x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\min & (5+\delta)u_1 + 4u_2 \\
 & u_1 + u_2 \geq 2 \\
 & 2u_1 + u_2 \geq 6 \\
 & u_1, u_2 \geq 0
\end{array}
\quad (D)_\delta
$$

Geometricamente un aumento di δ del r.h.s. del primo vincolo, corrisponde a spostare il vincolo "verso l'alto". La situazione è rappresentata geometricamente in Figura 9.2, in rosso le variazioni. È evidente che la soluzione ottima si sposta nel punto $x^*_\delta = (0, \frac{5+\delta}{2})^T$ di valore $c^T_\delta x^*_\delta = 6\frac{(5+\delta)}{2} = c^T x^* + 3\delta$. L'aumento nella funzione obiettivo è quindi pari a 3δ. Il massimo valore che può assumere δ corrisponde al valore per cui il vincolo $x_1 + 2x_2 \leq 5 + \delta$ passa per il punto $(0,\ 4)^T$, ovvero $\delta = 3$.
Per $\delta > 3$, il primo vincolo non gioca più alcun ruolo nella definizione della regione ammissibile e la risorsa che diventa vincolante è la seconda.

Nel problema duale, un variazione di δ corrisponde ad una variazione del coefficiente angolare della funzione obiettivo. La regione ammissibile del problema duale è rimasta invariata. Il valore $\delta = 3$ corrisponde alla funzione obiettivo $8u_1 + 4u_2$ rappresentata in rosso in Figura 9.2 per valore $= 0$. Le curve di livello di questa funzione sono parallele al secondo vincolo del problema duale. La soluzione ottima del problema duale $(D)_\delta$ rimane la soluzione $u^* = (3,\ 0)^T$

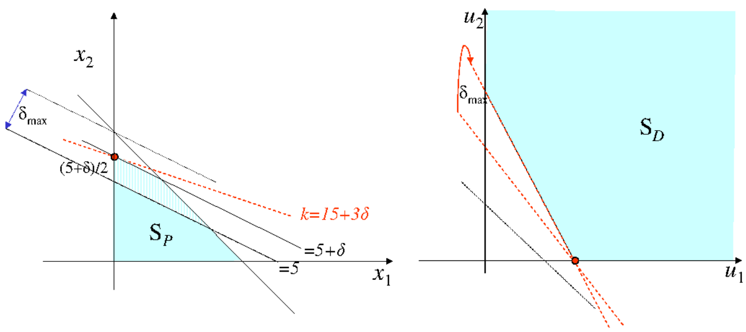

Figura 9.2: Soluzione grafica della coppia primale duale al variare di δ

per $\delta \leq 3$. Poiché la soluzione ottima $u_\delta^* = u^*$ il valore $c_\delta^T u_\delta^* = (5+\delta)3 = 5u_1^* + \delta u_1^*$. La variazione del valore ottimo è 3δ pari a quanto determinato nel caso primale.
Il valore $3 = u_1^*$ rappresenta anche quanto sono disposto a pagare al massimo un'unità in più di tale risorsa.

Per valori di $\delta > 3$, la soluzione ottima del problema duale cambia e diventa il punto $(0,\ 6)^T$ di valore 24 indipendente dal valore di δ.

Possiamo riassumere le considerazioni fatte fin qui nella seguente affermazione

L'aumento della prima risorsa (r.h.s. primo vincolo) di un valore δ produce un aumento della funzione obiettivo pari a $u_1^*\delta = 3\delta$ purché $\delta \leq 3$.
Il valore ottimo della variabile duale u_1^* rappresenta il massimo costo affrontabile per l'aumento di una unità di risorsa.

Il valore $u_1^* = 3$ è detto *prezzo ombra* relativo alla prima risorsa (al primo vincolo). L'intervallo $0 \leq \delta \leq 3$ è l'intervallo entro cui la previsione sulla variazione della funzione obiettivo è valida. (In realtà si può prevedere anche un decremento $-\delta$).

9.3.3 Interpretazione economica della dualità e prezzi ombra

Come visto nell'esempio, in generale, le variabili duali (i prezzi ombra) rappresentano l'effetto di cambiamenti nel termine noto dei vincoli. Si consideri, infatti un generico problema di Programmazione Lineare (in forma standard) (P), il suo duale (D) ed inoltre si consideri il problema (P_Δ) ottenuto modificando il termine noto da b a $b+\Delta$ (con $\Delta = (\delta_1 \ldots, \delta_m)^T \in \mathbb{R}^m$) e il corrispondente problema duale (D_Δ):

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(D)} \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \end{cases}$$

$$(P_\Delta) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b + \Delta \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (D_\Delta) \quad \begin{cases} \max (b+\Delta)^T u \\ A^T u \leq c \end{cases}$$

Siano $x^\star$ e $u^\star$ rispettivamente la soluzione ottima del problema (P) e del problema (D). Siano inoltre $x^\star(\Delta)$ e $u^\star(\Delta)$ rispettivamente la soluzione del problema (P_Δ) e del problema (D_Δ)

Dalle formulazioni di questi problemi si possono facilmente dedurre due osservazioni:

- la variazione del termine noto b nel problema primale si riflette in un cambiamento dei coefficienti della funzione obiettivo del problema duale;
- la regione ammissibile del problema (D) e del problema (D_Δ) sono uguali; da questo segue che se $u^\star \in \mathbb{R}^m$ è soluzione ottima del problema (D) allora $u^\star$ è ammissibile per il problema (D_Δ), ma non necessariamente è ottima per (D_Δ).

Inoltre per il Teorema della dualità forte applicato alla coppia primale–duale (P)–(D) deve essere

$$c^T x^\star = b^T u^\star, \tag{9.11}$$

mentre, sempre per il Teorema della dualità forte ma applicato alla coppia primale–duale (P_Δ)–(D_Δ) deve essere

$$c^T x^\star(\Delta) = (b+\Delta)^T u^\star(\Delta). \tag{9.12}$$

Se la soluzione ottima $x^\star$ soddisfa un'opportuna ipotesi (cioè che in $x^\star$ non ci siano più di n vincoli attivi) e se il vettore Δ ha componenti "sufficientemente" piccole allora si può dimostrare che:

$$u^\star(\Delta) = u^\star. \tag{9.13}$$

Utilizzando la (9.11), la (9.12) e la (9.13) si ha:

$$c^T x^\star(\Delta) = (b+\Delta)^T u^*(\Delta) = b^T u^\star + \Delta^T u^\star = c^T x^\star + \Delta^T u^\star, \tag{9.14}$$

che può essere riscritta nella seguente forma:

$$c^T x^\star(\Delta) - c^T x^\star = \delta_1 u_1^\star + \delta_2 u_2^\star + \ldots + \delta_m u_m^\star, \tag{9.15}$$

dove $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m)^T$.

Dalla precedente relazione segue che una possibile interpretazione della variabile duale $u_i^\star$ è quella di essere un prezzo associato ad un incremento unitario del termine noto b_i. Per questa ragione le variabili duali $u_i^\star$, $i = 1, \ldots, m$, vengono denominate *prezzi ombra*.

Il *prezzo ombra* di un vincolo rappresenta la variazione del valore della funzione obiettivo quando il r.h.s. del vincolo è aumentato di una unità, mentre tutti gli altri dati del problema sono fissati.

Sebbene la (9.13) (e di conseguenza la (9.15)) valga solamente sotto opportune ipotesi, in molte situazioni pratiche, le variabili duali $u_i^\star$, $i = 1, \ldots, m$, forniscono delle utili indicazioni su quale componente b_i variare per migliorare il valore ottimo della funzione obiettivo.

Ricordiamo i principi generali che regolano l'uso dei prezzi ombra.

1. I prezzi ombra sono tanti quanti i vincoli lineari generali (esclusi i vincoli di non negatività sulle variabili).
2. l'unità di misura dei prezzi ombra è espressa in (unità di misura funzione obiettivo)/(unità misura vincolo).
3. I prezzi ombra corrispondono al valore delle variabili duali (all'ottimo), ovvero ai moltiplicatori di KKT relativi alla soluzione ottima primale.

9.4 Interpretazione della Dualità

Se un problema di Programmazione Lineare proviene da una precisa classe di problemi applicativi e dunque ha una struttura bene definita, il suo corrispondente duale si può prestare ad essere interpretato come problema applicativo diverso ma collegato al problema primale.

9.4.1 Il duale del problema di allocazione ottima di risorse

Si consideri nuovamente il semplice problema di allocazione ottima dell'Esempio 2.4.1 che è rappresentato dal seguente problema di Programazione Lineare:

$$\begin{array}{ll} \max & (7x_1 + 10x_2) \\ & x_1 + x_2 \leq 750 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ & x_2 \leq 400 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \tag{9.16}$$

Ricordiamo che le variabili x_1 e x_2 sono associate rispettivamente ai quantitativi di colorante **C1** e **C2** da produrre e che la produzione avviene utilizzando tre preparati base **P1**, **P2** e **P3** dei quali si ha una disponibilità massima rispettivamente pari a 750, 1000 e 400 ettogrammi. Supponiamo, ora di voler sottrarre preparati base dalla produzione dei coloranti per venderli direttamente. Indichiamo con u_1, u_2 e u_3 i prezzi associati rispettivamente alla vendita diretta di un ettogrammo di preparato base **P1**, **P2** e **P3**. Supponendo di destinare tutti i preparati alla vendita diretta, il profitto che si otterrebbe sarebbe

$$750u_1 + 1000u_2 + 400u_3. \tag{9.17}$$

Naturalmente si vorrà fare in modo che questa operazione di sottrazione dei preparati base dalla produzione dei coloranti e vendita diretta risulti economicamente conveniente e quindi mentre si vuole minimizzare l'espressione (9.17) affinché i prezzi di vendita risultino competitivi sul mercato, si imporrà che il profitto ottenuto vendendo direttamente i quantitativi di preparato base necessario per ottenere un litro di colorante sia maggiore o uguale del profitto associato alla vendita di un litro di colorante stesso; quindi, utilizzando i dati del problema riportati nella tabella dell'Esempio 2.4.1, si deve imporre che risulti

$$u_1 + u_2 \geq 7$$

per quanto riguarda il colorante **C1** e

$$u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 10$$

per quanto riguarda il colorante **C2** e naturalmente deve essere $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$ e $u_3 \geq 0$. Quindi il modello lineare che rappresenta l'operazione sopra descritta è il seguente:

$$\begin{array}{ll} \min & (750u_1 + 1000u_2 + 400u_3) \\ & u_1 + u_2 \geq 7 \\ & u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 10 \\ & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \end{array}$$

Esaminando questo problema si vede immediatamente che esso rappresenta il *problema duale* del problema dato (9.16).

In generale, se si considera un generico problema di allocazione ottima di m risorse $\mathbf{R_i}$, $i = 1, \ldots, m$ con la possibilità di fabbricare n prodotti $\mathbf{P_j}$, $j = 1, \ldots, n$, come abbiamo già esaminato nel capitolo precedente si può formulare questo problema come

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{9.18}$$

dove ricordiamo $x \in \mathbb{R}^n$ è il vettore avente per componenti i livelli di produzione di ciascuno dei prodotti, $c \in \mathbb{R}^n$ il vettore dei profitti netti e $b \in \mathbb{R}^m$ il vettore delle disponibilità massima di ciascuna delle risorse.

Supponiamo ora di voler sottrarre risorse alla produzione per venderle direttamente e siano u_i, $i = 1, \ldots, m$ i prezzi unitari associati alla vendita dell'i-esima risorsa. Supponendo che per ciascuna risorsa si voglia destinare alla vendita una quantità pari alla disponibilità massima di quella risorsa, si ottiene un profitto pari a

$$b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_mu_m.$$

Per rendere competitivi sul mercato i prezzi unitari u_i da assegnare alle risorse vendute direttamente, si vogliono scegliere i valori più bassi possibile per le u_i, ma naturalmente, affinché questa operazione di vendita diretta in luogo della fabbricazione dei prodotti risulti conveniente si deve imporre che il profitto ottenuto vendendo direttamente le risorse necessarie per fabbricare un prodotto sia maggiore o uguale al profitto che si ricaverebbe dalla vendita del prodotto finito. Quindi per ogni prodotto, si deve imporre che valga

$$\begin{array}{cccc} a_{11}u_1+ & \ldots & +a_{m1}u_m & \geq c_1 \\ a_{12}u_1+ & \ldots & +a_{m2}u_m & \geq c_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}u_1+ & \ldots & +a_{mn}u_m & \geq c_n \end{array}$$

con $u_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ e dove le quantità a_{ij} rappresentano la quantità di risorsa $\mathbf{R_i}$ necessaria per fabbricare una unità di prodotto $\mathbf{P_j}$.

Quindi il problema da risolvere può essere scritto nella forma

$$\begin{array}{ll} \min & b^T u \\ & A^T u \geq c \\ & u \geq 0 \end{array}$$

che è il problema duale del problema (9.18).

9.4.2 Il duale del problema di miscelazione.

Si consideri il problema di miscelazione dell'Esempio 3.3.1 che è rappresentato dal seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{ll} \min & 400x_1 + 600x_2 \\ & 140x_1 \geq 70 \\ & 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ & 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Ricordiamo che le variabili x_1 e x_2 rappresentano le quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare nella produzione del succo di frutta che deve avere come requisito un contenuto minimo di 70 mg di vitamina C, 30 mg di sali minerali e 75 grammi di zucchero. Supponiamo ora che un'industria farmaceutica venda compresse di nutrimenti puri, cioè compresse di vitamina C, di sali minerali e di zucchero e che vuole immettere queste compresse su un ipotetico mercato come offerta sostitutiva al succo di frutta per l'acquisizione di vitamina C, di sali minerali e di zucchero. Naturalmente questa industria farmaceutica vuole massimizzare il profitto ricavato dalla vendita delle compresse, ma al tempo stesso deve dare un prezzo alle compresse tale da essere competitiva. Siano allora u_1, u_2 e u_3 i prezzi di vendita rispettivamente di 1 mg di vitamina C, di 1 mg di sali minerali e di 1 grammo di zucchero; supponendo che la vendita di questi nutrimenti puri sia pari ai fabbisogni minimi (cioè a 70 mg di vitamina C, a 30 mg di sali minerali e a 75 grammi di zucchero), l'espressione del profitto dell'industria farmaceutica che dovrà essere massimizzata è

$$70u_1 + 30u_2 + 75u_3.$$

Affinché i prezzi di vendita dei componenti puri in compresse fissati dall'industria siano concorrenziali, si deve imporre che il costo unitario dei nutrimenti puri sia minore o uguale al prezzo che si dovrebbe pagare per avere la stessa quantità di componente attraverso gli ingredienti del succo di frutta, cioè dalla polpa di frutta e dal dolcificante. Quindi si devono imporre i seguenti vincoli

$$\begin{array}{rcl} 140u_1 + 20u_2 + 25u_3 & \leq & 400 \\ 10u_2 + 50u_3 & \leq & 600. \end{array}$$

Inoltre dovrà essere $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $u_3 \geq 0$.

Quindi il problema complessivo formulato dall'industria farmaceutica è

$$\begin{array}{ll}\max & 70u_1 + 30u_2 + 75u_3 \\ & 140u_1 + 20u_2 + 25u_3 \leq 400 \\ & 10u_2 + 50u_3 \leq 600 \\ & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0\end{array}$$

che è il problema duale del problema di miscelazione considerato.

In generale, consideriamo un generico problema di miscelazione in cui si hanno n sostanze $\mathbf{S_j}$, $j = i, \ldots, n$ ciascuna delle quali contiene una quantità a_{ij} di componente utile $\mathbf{C_i}$, $i = 1, \ldots, m$. Come abbiamo già esaminato nel capitolo precedente un problema di miscelazione di questo tipo si può formulare come

$$\begin{array}{ll}\min & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0\end{array} \tag{9.19}$$

dove ricordiamo che $x \in \mathbb{R}^n$ è il vettore avente per componenti le quantità di ciascuna sostanza da introdurre nella miscela, $c \in \mathbb{R}^n$ il vettore dei costi unitari delle sostanze, $b \in \mathbb{R}^m$ il vettore dei requisiti minimi di componenti utili da introdurre nella miscela, e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice i cui elementi sono le a_{ij}.

Supponiamo ora che un'industria sia in grado di fornire componenti utili allo stato puro e che voglia immettere sul mercato questi componenti utili e siano u_i, $i = 1, \ldots, m$ i prezzi unitari da assegnare a ciascuno di essi. Supponendo che la richiesta del mercato sia pari ai fabbisogni minimi della miscela, cioè per ciascun componente pari a b_i, il profitto totale dell'industria che vende i componenti utili allo stato puro è

$$b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_m u_m.$$

Inoltre, affinché i prezzi u_i assegnati dall'industria ai componenti puri siano concorrenziali, si deve imporre che il costo dei componenti puri sia minore o uguale al prezzo che dovrebbe pagare per avere la stessa quantità di componente ottenuto attraverso le sostanze e quindi deve valere

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \leq c_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Inoltre si deve imporre $u_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Quindi il problema formulato si può scrivere nella forma

$$\begin{array}{ll}\max & b^T u \\ & A^T u \leq c \\ & u \geq 0\end{array}$$

che è immediato verificare essere il problema duale del problema di miscelazione assegnato (9.19).

9.4.3 Il duale del problema dei trasporti

Si consideri un problema di trasporto di acqua da due stabilimenti di produzione a tre impianti di imbottigliamento. La disponibilità giornaliera di acqua presso i due stabilimenti è rispettivamente di 50 e 55 ettolitri di acqua, mentre le richieste giornaliere di acqua presso i tre impianti sono rispettivamente di 30, 40 e 35 ettolitri. I costi di trasporto da ciascun stabilimento di produzione P_i a ciascun impianto di imbottigliamento S_j sono riportati in tabella

	S_1	S_2	S_3
P_1	250	100	85
P_2	120	80	150

Il poblema è rappresentato dal seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\min \quad (250x_{11} + 100x_{12} + 85x_{13} + 120x_{21} + 80x_{22} + 150x_{23})$$

$$\begin{array}{lllllllllll}
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & = & 50 \\
& & & & & & x_{21} & + & x_{22} + x_{23} & = & 55 \\
x_{11} & + & & & & & x_{21} & & & = & 30 \\
& & x_{12} & + & & & & & x_{22} & = & 40 \\
& & & & x_{13} & + & & & x_{23} & = & 35
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

dove x_{ij}, rappresentano rispettivamente quantità di acqua da trasportare dallo stabilimento i ai tre impianti j.

Supponiamo ora che una compagnia specializzata in trasporto di acqua (esterna all'industria) voglia proporsi all'industria di acque minerali per effettuare il trasporto dell'acqua dagli stabilimenti agli impianti. Naturalmente la compagnia di trasporti, per convincere l'industria di acque minerali ad avvalersi del servizio di trasporto esterno, dovrà proporre dei prezzi di trasporto vantaggiosi. A tale scopo la compagnia dei trasporti propone all'industria di prelevare un ettolitro di acqua da ciascuno dei due stabilimenti per un prezzo unitario (in migliaia di lire) rispettivamente pari a u_1 e u_2 e di consegnare un ettolitro di acqua a ciascuno dei tre impianti per un prezzo unitario (in migliaia di lire) rispettivamente pari a v_1, v_2 e v_3. Quindi la compagnia dei trasporti vorrà massimizzare la funzione che fornisce il suo profitto complessivo che è data da

$$50u_1 + 55u_2 + 30v_1 + 40v_2 + 35v_3.$$

Tuttavia affinché l'offerta della compagnia dei trasporti risulti vantaggiosa per l'industria delle acque minerali i prezzi del trasporto proposti dovranno risultare non superiori a quelli che l'industria avrebbe effettuando in proprio i trasporti stessi. Quindi dovrà risultare

$$\begin{aligned}
u_1 + v_1 &\leq 250 \\
u_1 + v_2 &\leq 100 \\
u_1 + v_3 &\leq 85 \\
u_2 + v_1 &\leq 120 \\
u_2 + v_2 &\leq 80 \\
u_2 + v_3 &\leq 150.
\end{aligned}$$

Quindi, la compagnia dei trasporti dovrà risolvere il problema

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\max & (50u_1 & + & 55u_2 & + & 30v_1 & + & 40v_2 & + & 35v_3) & & \\
& u_1 & & & & +v_1 & & & & & \leq & 250 \\
& u_1 & & & & & & +v_2 & & & \leq & 100 \\
& u_1 & & & & & & & & +v_3 & \leq & 85 \\
& & & u_2 & & +v_1 & & & & & \leq & 120 \\
& & & u_2 & & & & +v_2 & & & \leq & 80 \\
& & & u_2 & & & & & & +v_3 & \leq & 150
\end{array}$$

che si verifica immediatamente essere il problema duale del problema dei trasporti assegnato.

In generale, consideriamo ora un generico problema dei trasporti già esaminato nel capitolo precedente. Supponiamo che un'azienda voglia provvedere in proprio ad effettuare il trasporto di materiali e che quindi cerchi di risolvere il problema dei trasporti

$$\begin{array}{ll}
\min & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \dots, m \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \dots, n \\
& x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m
\end{array} \tag{9.20}$$

dove, ricordiamo, che le c_{ij} rappresentano il costo del trasporto dall'origine i alla destinazione j, le a_i le disponibilità all'i-esima origine e le b_j le richieste alla j-esima destinazione.

Supponiamo, ora che una compagnia che esegue trasporti voglia proporsi a questa azienda, come alternativa vantaggiosa all'effettuazione dei trasporti in proprio; a tale scopo questa compagnia propone all'azienda di prelevare un'unità di prodotto dall'origine i per un prezzo unitario u_i e di consegnare una unità di prodotto alla destinazione j per un prezzo unitario v_j. Per assicurare che i suoi prezzi siano competitivi rispetto a quelli che l'azienda avrebbe effettuando i trasporti in proprio, la compagnia di trasporti deve fare sì che risulti

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. D'altra parte la compagnia di trasporti vuole scegliere i prezzi da proporre $u_1, \dots, u_m$ e $v_1, \dots, v_n$ in modo da massimizzare il suo profitto complessivo. Poiché le quantità a_i e b_j di prodotto rispettivamente disponibili all'origine i e richieste alla destinazione j sono note alla compagnia di trasporti, questa cercherà di massimizzare la funzione

$$\max \left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right).$$

Quindi il problema che la compagnia di trasporti formula per determinare quali prezzi u_i e v_j proporre all'azienda è il seguente

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \\
& u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{9.21}
$$

che è il problema duale del problema dei trasporti (9.20).